

# 弦振动实验

姓名: 鲁睿 班级: 未央-软 11 学号: 2021012539

实验时间: 2022 年 3 月 30 日 下午 实验编号: 16 号

## 摘 要

本实验从理论上分析末端边界反射性质, 借助弦振动方程推导出弦振动共振频率对应计算公式。从实验上观察在信号发生器弦在弦线上的传播现象, 使用单一变量法, 在固定其他变量的情况下, 分别探究  $f$  与  $n, L, T, \rho$  的关系, 并使用最小二乘法拟合直线, 结果表明在误差  $\pm 3\%$  以内, 实验公式中各变量的拟合幂次与理论幂次相同。同时计算了弦上传播的理论速度和实际速度, 两者误差在  $\pm 3\%$  区间内。

使用 python 中数据分析库 numpy 以及绘图库 matplotlib 整理并处理实验测量数据, 数据结果与 Excel 软件结果相同, 可减少重复性的工作量。

关键词: 波动方程; 驻波; 共振; 最小二乘法

## 目 录

|          |    |
|----------|----|
| 1 实验目的   | 3  |
| 2 实验仪器   | 3  |
| 3 实验内容   | 4  |
| 3.1 实验原理 | 4  |
| 3.2 实验步骤 | 6  |
| 3.3 数据处理 | 6  |
| 4 讨论     | 13 |
| 5 绘图源代码  | 14 |
| 6 原始数据   | 18 |

## 插 图

|                 |   |
|-----------------|---|
| 1 弦振动推导         | 4 |
| 2 两端固定弦的驻波波形示意图 | 5 |
| 3 弦振动实验仪器连接图    | 6 |

|    |                                      |    |
|----|--------------------------------------|----|
| 4  | $f$ 与 $n$ 线性回归拟合图 (最小二乘法)            | 7  |
| 5  | 对照 excel 表结果                         | 7  |
| 6  | 采用截距为 0 拟合频率与谐频次数直线                  | 8  |
| 7  | $f$ 与 $\frac{1}{L}$ 线性回归拟合图 (最小二乘法)  | 9  |
| 8  | 采用截距为 0 拟合频率与弦长倒数直线                  | 9  |
| 9  | $\ln f$ 与 $\ln T$ 线性回归拟合图 (最小二乘法)    | 10 |
| 10 | $\ln f$ 与 $\ln \rho$ 线性回归拟合图 (最小二乘法) | 11 |
| 11 | 李萨如图形                                | 13 |
| 12 | 新概念基础物理实验中关于截距为 0 的模型讨论              | 14 |
| 13 | 弦振动实验原始数据                            | 18 |

## 表 格

|   |                                     |    |
|---|-------------------------------------|----|
| 1 | 弦振动实验仪器                             | 3  |
| 2 | 弦线编号与定位柱颜色的对应关系以及线密度值               | 3  |
| 3 | 固定弦长、种类、张力不变, $f$ 与谐振次数 $n$ 的关系     | 7  |
| 4 | 固定种类、张力、谐振次数不变, $f$ 与弦长 $L$ 的关系     | 8  |
| 5 | 固定种类、弦长、谐振次数不变, $f$ 与张力 $T$ 的关系     | 10 |
| 6 | 固定弦长、张力、谐振次数不变, $f$ 与线密度 $\rho$ 的关系 | 10 |

## 1 实验目的

- (1) 观测弦振动，学习如何使用示波器测量共振频率；
- (2) 使用单一变量法，研究弦振动共振频率与各参数之间的关系；
- (3) 通过最小二乘法以及对数法定量计算各物理量之间的关系；
- (4) 使用 python 编程语言线性拟合以及作图。

## 2 实验仪器

| 名称          | 型号       | 参数                                       | 精度                                      |
|-------------|----------|------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 弦振动实验仪器     | Bunker   | 600 mm                                   | 1 mm                                    |
| DOS 函数信号发生器 | TFG1005  | 0 ~ 20Vpp<br>0.03Hz ~ $6 \times 10^6$ Hz | 0.001Vpp<br>0.03Hz ~ $6 \times 10^6$ Hz |
| 示波器         | TDS1012C | 60 MHz, 1 GS/s                           | 0.01Vpp, 0.01Hz                         |
| 弦 (6 根)     | 未知       | 见表 2                                     | 无                                       |
| 砝码 (6 个)    | 未知       | 200g                                     | 无                                       |
| 尼龙绳 (1 根)   | 未知       | 34.3cm                                   | 无                                       |

表 1: 弦振动实验仪器

其中六根弦对应定位柱颜色对应关系以及线密度值见下表:

| 弦线编号及对应定位柱颜色 | 线密度 (kg/m) |
|--------------|------------|
| 6 # (银)      | 0.00936    |
| 5 # (金)      | 0.00578    |
| 4 # (绿)      | 0.00350    |
| 3 # (黑)      | 0.00191    |
| 2 # (蓝)      | 0.00098    |
| 1 # (红)      | 0.00055    |

表 2: 弦线编号与定位柱颜色的对应关系以及线密度值

### 3 实验内容

#### 3.1 实验原理

##### 1 波速公式的导出

假设一根均匀半无限长柔软的弦线被拉紧, 弦线中的张力为  $T$ 。在一端加以垂直方向的振动激励之后, 由张力作用, 始端弦线的振动将带动它的邻段, 而邻段又带动它自己的邻段……如此链式地传播到整根弦。

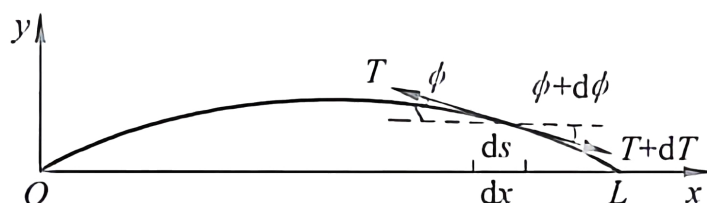


图 1: 弦振动推导

在弦作横向小振动的某时刻, 设长度为  $ds$  的线元处于上图 1 所示状态, 其中  $y$  表示位移,  $T$  表示弦上张力,  $x$  表示弦上线元的位置坐标。线元质量为  $\rho ds$ , 由于线元  $\rho ds$  未受其他外力, 它在  $y$  方向的受力平衡, 忽略弦的重力影响时可得运动方程

$$\left(T + \frac{dT}{ds} ds\right) \sin\left(\phi + \frac{d\phi}{ds} ds\right) - T \sin\phi = (\rho ds) \frac{d^2 y}{dt^2}$$

对于小振动, 近似式  $ds \approx dx$  和  $\sin\phi \approx \phi \approx \tan\phi = \frac{dy}{dx}$ , 从而化为可以分离变量的二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

该偏微分方程的通解为  $y(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt)$ , 为两个向左向右传播函数的叠加, 其中波速  $v$  为

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

可知, 振动在线上传播的速率  $v$  仅与弦参数  $T$  和  $\rho$  有关

##### 2 反射现象以及边界条件

在边界上振动传播时, 由于边界固定, 从而反射回来的波与原来波相位相差  $\pi$ , 这样能够保证在端点处是严格固定的。也可以通过数学推导得到, 假设入射波为沿正  $x$

方向传播的波，波动方程为  $y^+ = f(vt - x)$ 。反射波为负  $x$  方向传播的波，波形为  $y^- = f(vt + x)$ 。入射波和反射波叠加得到驻波方程

$$y(t, x) = y^+ + y^- = f(vt - x) + f(vt + x)$$

代入边界条件  $y(t, x)|_{x=L} = 0$ , 可得  $y^-|_L = -y^+|_L$ , 即弦线末端处  $t = t_0$  时刻反射波的幅度与入射波大小相同、方向相反, 二者完全抵消。

### 3 弦在正弦激励下的驻波现象

实验过程中使用正弦波激励吉他弦, 设有同振幅 (假设能量不会损失)、同频率的两列平面简谐波, 沿  $x$  轴正方向和负方向传播。它们的波动方程分别为

$$y_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad y_2 = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \Delta\varphi\right)$$

代入  $x = 0$  处边界条件得  $\Delta\varphi = \pi$ , 则合成波的表达式  $y = y_1 + y_2 = -2A \sin \frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \sin \omega t$  从该表达式可以看出, 只要固定驻波上的位置, 该位置上的振幅为定值且  $\in [0, 2A]$ , 振动频率与原频率相同。

再代入  $x = L$  处边界条件有  $\sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L = 0 \implies \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$ , 得到  $L = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 1, 2, \dots$  结合波速表达式以及  $v = f\lambda$  得到以下共振频率的表达式

$$f = \frac{n}{2L}v = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

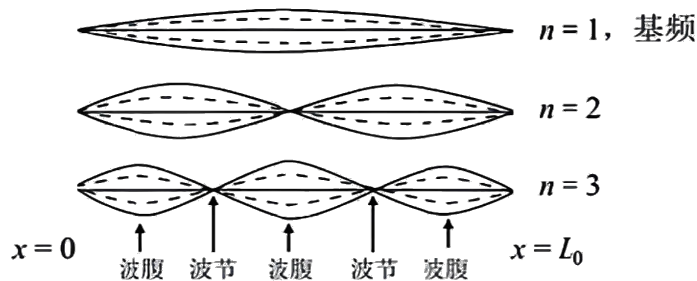


图 2: 两端固定弦的驻波波形示意图

对应驻波形态如下图所示

### 3.2 实验步骤

- (1). 选择实验所需要的弦，弦右侧颜色定位端靠近滑轮处，使用尼龙绳一侧的挂钩相连。弦的左端穿过左侧蝶形螺母上的小孔并旋转螺母固定。细绳绕过两个滑轮后挂上砝码钩以施加适当的张力。
- (2). 调整两个弦码至合适的位置、并用标尺测定两个弦码之间的距离作为弦的长度（固定或改变弦长  $L$ ）。
- (3). 逐一增减放在砝码钩上的砝码数量，尽量维持系统稳定；

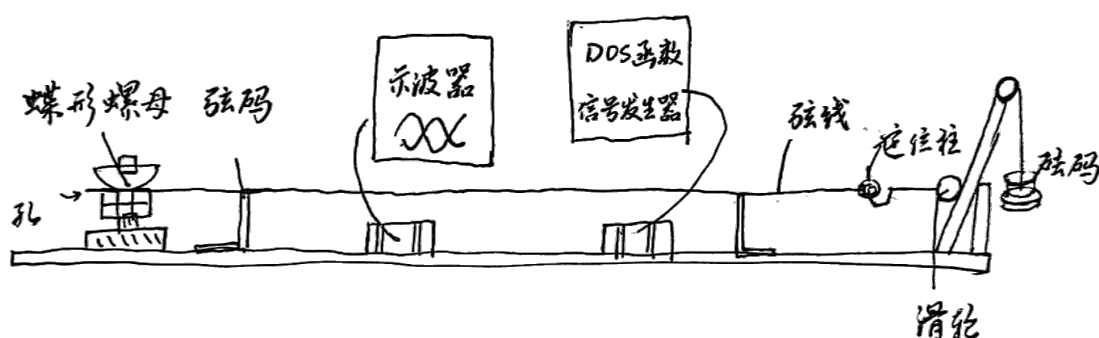


图 3: 弦振动实验仪器连接图

- (4). 驱动线圈和接受线圈分别与信号发生器和示波器连接，检查连接处是否发生松动，设置信号发生器正弦信号峰峰值  $V_m \sim 5v$ ，并调整频率  $f \sim 100Hz$ ，示波器上出现稳定的激励正弦信号（黄色）；
- (5). 保证驱动线圈与接受线圈至少保持  $10cm$  的距离，缓慢调整信号发生器的输出频率 ( $10 \sim 200Hz$ )，观察接受正弦信号（蓝色）振幅从小到大再到小，在极值点附近微调，使示波器上接受到的波形为清晰的正弦信号且幅度最大；
- (6). 记录当前示波器频率对应当前系统状态的共振频率。

### 3.3 数据处理

#### (1) 观察弦的振动，分析 $f \sim n$ 关系

在本实验中，选取 #6 弦（银色），固定弦长  $L = 50.0\text{ cm}$ 、张力  $T = 9.80\text{ N}$ （5 个砝码），形成  $n = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$  的驻波，测量共振频率  $f = f(n)$ ，实验数据如下：

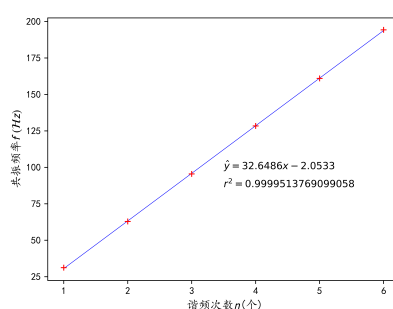
| 谐频次数 (个)  | 1     | 2     | 3     | 4      | 5      | 6      |
|-----------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 共振频率 (Hz) | 31.20 | 62.90 | 93.50 | 128.40 | 161.00 | 194.30 |

表 3: 固定弦长、种类、张力不变,  $f$  与谐频次数  $n$  的关系

使用 python 编程计算拟合斜率以及其不确定度, 回归结果以及相应作图如下:

线性拟合斜率  $k = 32.649$       调用 Excel 中 TINV 函数  $t_{0.95,6} = 2.776$

斜率标准偏差  $s_k = 0.114$       斜率不确定度为  $U_b = 0.316$

图 4:  $f$  与  $n$  线性回归拟合图 (最小二乘法)

这与 Excel 表计算结果在小数点后 12 位均相同, excel 表对应结果如下图所示:

|    | A      | B       | C |
|----|--------|---------|---|
| 5  | 1      | 31.2    |   |
| 6  | 2      | 62.9    |   |
| 7  | 3      | 95.5    |   |
| 8  | 4      | 128.4   |   |
| 9  | 5      | 161     |   |
| 10 | 6      | 194.3   |   |
| 11 | 标准偏差   | 0.11383 |   |
| 12 | TINV因子 | 2.77645 |   |
| 13 | 不确定度   | 0.31605 |   |
| 14 |        |         |   |

图 5: 对照 excel 表结果

但是, 由于理论公式要求无截距, 上述拟合方法没有对深刻理解误差理论, 重新作图如下:

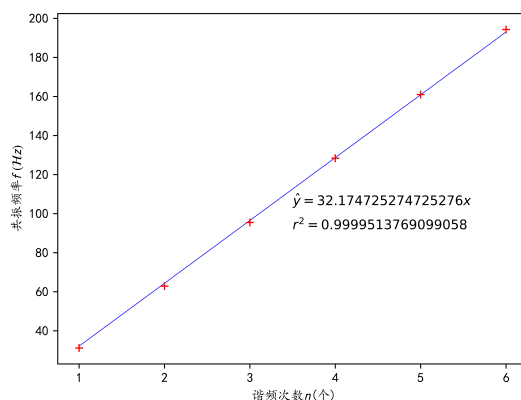


图 6: 采用截距为 0 拟合频率与谐频次数直线

截距为 0 时的拟合斜率结果为  $(32.174 \pm 0.4) \text{ Hz}$ , 代入理论数据,  $k_{theory} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2 \times 0.5 \text{ m}} \sqrt{\frac{9.8 \text{ N}}{9.36 \times 10^{-3} \text{ kg/m}}} = 32.358 \text{ Hz}$ , 在  $32.1 \pm 0.4 (\text{Hz})$  范围内, 误差为 0.6 %

## (2) 观察弦的振动, 分析 $f \sim L$ 关系

在本实验中, 选取 #4 弦 (绿色), 固定张力  $T = 9.80 \text{ N}$  (5 个砝码), 等距变化弦长  $L$ , 测量  $n = 1$  时的基频频率  $f = f(L)$ , 实验数据如下:

| 弦长 (cm) | 30.0  | 35.0  | 40.0  | 45.0  | 50.0  | 55.0  |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 基频 (Hz) | 87.70 | 75.10 | 65.80 | 59.00 | 53.30 | 48.60 |

表 4: 固定种类、张力、谐振次数不变,  $f$  与弦长  $L$  的关系

计算最小二乘法斜率以及其不确定度以及作图如下:

线性拟合斜率  $k = 25.718$       调用 Excel 中 TINV 函数  $t_{0.95,6} = 2.776$

斜率标准偏差  $s_k = 0.219$       斜率不确定度为  $U_b = 0.608$

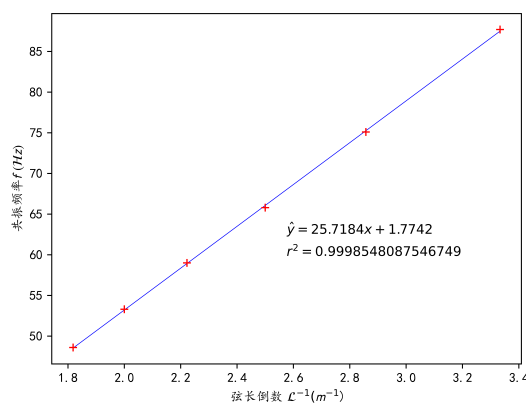


图 7:  $f$  与  $\frac{1}{L}$  线性回归拟合图 (最小二乘法)

同理，固定截距  $b = 0$ ，重新作图如下：

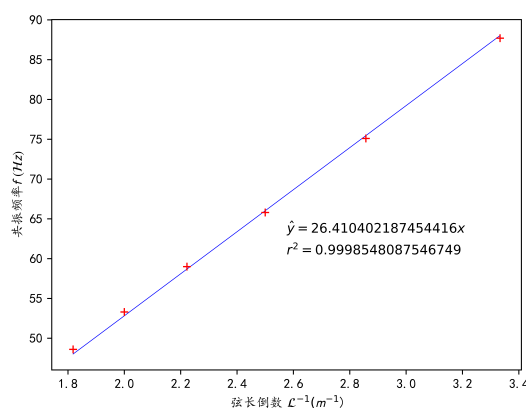


图 8: 采用截距为 0 拟合频率与弦长倒数直线

代入理论数据， $k_{theory} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9.8N}{3.50 \times 10^{-3} kg/m}} = 26.46 Hz$ ，如果采用没有固定  $b = 0$  时的数据结果  $25.7 \pm 0.6(Hz)$  范围相比略微偏大，但在修正截距为 0 后，结果为  $26.4 \pm 0.5(Hz)$ ，误差为 0.2%，说明固定截距为 0 的合理性。

### (3) 分析 $f \sim T$ 关系

在本实验中，选取 #2 弦（蓝色），固定弦长  $L = 50.0 \text{ cm}$ ，改变砝码个数，每个砝码  $G = m_0 g = 1.96 N$ ，即在  $1.96 N \sim 11.76 N$  之间改变拉力，测量  $n = 1$  时的基频  $f = f(T)$ ，实验数据如下：

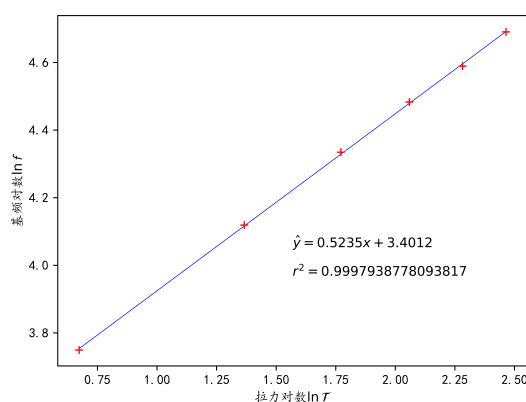
|           |         |         |         |         |         |         |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 拉力 (kg/m) | 0.00055 | 0.00098 | 0.00191 | 0.00350 | 0.00578 | 0.00936 |
| 基频 (Hz)   | 42.5    | 61.5    | 76.3    | 88.5    | 98.4    | 108.9   |

表 5: 固定种类、弦长、谐振次数不变,  $f$  与张力  $T$  的关系

计算最小二乘法斜率以及其不确定度以及作图如下:

线性拟合斜率  $k = 0.513$       调用 Excel 中 TINV 函数  $t_{0.95,6} = 2.776$

斜率标准偏差  $s_k = 0.005$       斜率不确定度为  $U_b = 0.015$

图 9:  $\ln f$  与  $\ln T$  线性回归拟合图 (最小二乘法)

由理论公式取对数得  $\ln f = \ln n + \frac{1}{2} \ln T - \ln L - \frac{1}{2} \ln \rho - \ln 2$ , 从而理论斜率为  $\frac{1}{2}$ , 这与拟合直线斜率 0.513 相对误差为  $\frac{0.513 - 0.5}{0.5} \approx 2.6\%$

#### (4) 分析 $f \sim \rho$ 关系

在本实验中, 固定弦长  $L = 50.0$  cm, 拉力  $T = 9.8$  N, 改变弦的种类 (#1 ~ #6), 测量不同弦在  $n = 1$  时的基频  $f = f(\rho)$ , 实验数据如下:

|         |      |      |      |      |      |       |
|---------|------|------|------|------|------|-------|
| 线密度 (N) | 1.96 | 3.92 | 5.88 | 7.84 | 9.8  | 11.76 |
| 基频 (Hz) | 42.5 | 61.5 | 76.3 | 88.5 | 98.4 | 108.9 |

表 6: 固定弦长、张力、谐振次数不变,  $f$  与线密度  $\rho$  的关系

计算最小二乘法斜率以及其不确定度以及作图如下:

线性拟合斜率  $k = -0.495$       调用 Excel 中 TINV 函数  $t_{0.95,6} = 2.776$

斜率标准偏差  $s_k = -0.013$       斜率不确定度为  $U_b = -0.036$

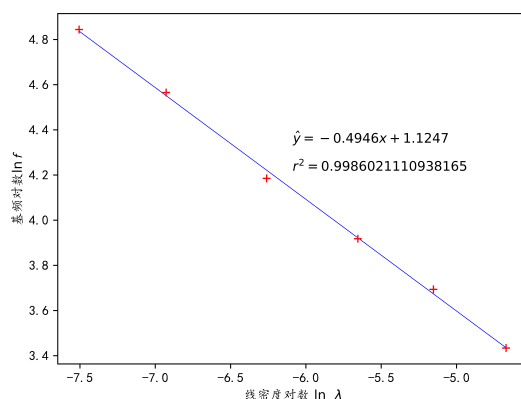


图 10:  $\ln f$  与  $\ln \rho$  线性回归拟合图 (最小二乘法)

由理论公式取对数得  $\ln f = \ln n + \frac{1}{2} \ln T - \ln L - \frac{1}{2} \ln \rho - \ln 2$ , 从而理论斜率为  $-\frac{1}{2}$ , 这与拟合直线斜率  $-0.4946$  相对误差为  $\frac{-0.4946 + 0.5}{-0.5} \approx 1.1\%$

#### (5) 分析弦的线密度、弦长、张力、基频与波速的关系

选取 (1)-(4) 部分得到的部分实验数据, 计算弦上振动的传播速度实验值  $v = f\lambda = \frac{2L}{n}f$  及理论值  $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , 并比较相对偏差。

(1). 取  $n = 1, T = 5.88\text{N}, L = 50.0\text{cm}$ , # 2 弦 (蓝色), 计算  $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.500\text{m}}{1} \cdot 76.30\text{Hz} \approx 76.30\text{m/s}$ , 以及  $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{5.88\text{N}}{9.8 \times 10^{-4}\text{kg/m}}} \approx 77.46\text{m/s}$ , 两者相对误差  $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{76.30\text{m/s} - 77.46\text{m/s}}{77.46\text{m/s}} \approx -1.5\%$

(2). 取  $n = 1, T = 9.8\text{N}, L = 35.0\text{cm}$ , # 4 弦 (绿色), 计算  $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.350\text{m}}{1} \cdot 75.10\text{Hz} \approx 52.57\text{m/s}$ , 以及  $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.8\text{N}}{3.50 \times 10^{-3}\text{kg/m}}} \approx 52.92\text{m/s}$ , 两者相对误差  $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{52.57\text{m/s} - 52.92\text{m/s}}{52.92\text{m/s}} \approx -0.7\%$

(3). 取  $n = 2, T = 9.8\text{N}, L = 50.0\text{cm}$ , # 6 弦 (蓝色), 计算  $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.500\text{m}}{2} \cdot 62.90\text{Hz} \approx 31.45\text{m/s}$ , 以及  $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.8\text{N}}{9.36 \times 10^{-3}\text{kg/m}}} \approx 32.36\text{m/s}$ , 两者相对误差  $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{31.45\text{m/s} - 32.36\text{m/s}}{32.36\text{m/s}} \approx -2.8\%$

- (4). 取  $n = 3, T = 9.8\text{N}, L = 50.0\text{cm}$ , # 6 弦 (银色), 计算  $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.500\text{m}}{3} \cdot 95.50\text{Hz} \approx 31.83\text{m/s}$ , 以及  $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.8\text{N}}{9.36 \times 10^{-3}\text{kg/m}}} \approx 32.36\text{m/s}$ , 两者相对误差  $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{31.83\text{m/s} - 32.36\text{m/s}}{32.36\text{m/s}} \approx -1.6\%$
- (5). 取  $n = 5, T = 9.8\text{N}, L = 50.0\text{mboxcm}$ , # 6 弦 (银色), 计算  $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.500\text{m}}{3} \cdot 161.00\text{Hz} \approx 32.30\text{m/s}$ , 以及  $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.8\text{N}}{9.36 \times 10^{-3}\text{kg/m}}} \approx 32.36\text{m/s}$ , 两者相对误差  $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{32.30\text{m/s} - 32.36\text{m/s}}{32.36\text{m/s}} \approx -0.2\%$

可见, 实验数据基本上满足实际值小于理论值, 可能为实验次数过多, 砝码磨损导致实际拉力较小, 从而产生的实际共振频率小于理论值。

## (6) 实验操作

为了方便地激发和测量弦振动现象, 激励线圈和探测线圈应如何放置?

- (1). 由于在两固定点之间有可能存在波腹和波节, 对于  $n \geq 2$  时, 弦上存在简谐运动振幅为 0 的点, 在摆放探测线圈时, 要避免将探测线圈放在  $\frac{i}{n}L, i = 1, 2, \dots, n-1$  位置处;
- (2). 在实验过程中, 发现当探测线圈和激励线圈靠得比较近时, 探测线圈显示信号和激励线圈信号几乎重合, 两者相互靠近会产生电磁干扰, 进而导致测量不准确。在测量过程中, 保持两个线圈之间的距离  $10\text{cm} \sim 15\text{cm}$ , 使测量更加准确;
- (3). 避免让弦与线圈距离过近, 否则弦的振动可能会受影响 (肉眼可见弦振动幅度在  $\text{mm}$  量级)

## (7) 实验技巧

如何快速找到一定实验条件下弦振动的共振频率? 总结一下你在实验中采用的方法。

- (1). 放上砝码后, 可以用手轻轻搭在砝码上起到“减震器”的作用, 让波形更加稳定;
- (2). 先通过计算理论值, 然后在理论值附近分度值由大到小进行调整, 从  $10\text{Hz}, 1\text{Hz}, 0.1\text{Hz}$  进行调整, 越接近最大值, 相邻两次调整时间相应增加, 使弦振动更加稳定;

- (3). 经过一系列尝试,发现激励线圈产生的波形几乎不变化。如果将探测线圈接受到的波形水平“压缩”到  $y$  轴形成一根比较明亮的线,这样只需要看这条线长度的增减即可调整共振频率;或者将两者直接合成在一起,由于激励和接受线圈形成的正弦波有稳定的相位差,从而会形成一个斜椭圆的李萨如图形,适当调整接受线圈的位置使该李萨如图形为一根直线,通过调整共振频率使得该直线斜率达到最大值或者最小值。

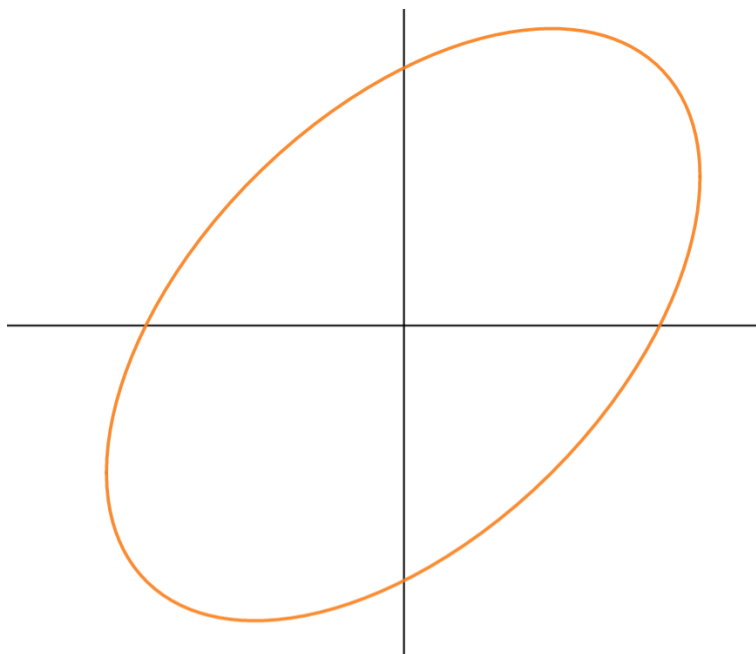


图 11: 李萨如图形

## 4 讨论

- (1). 在实验 (2) 过程中,需要将弦长加到 55.0cm,此时若只调整两侧的 L 型定位柱不能达到目的,想到的方法为 3cm – 58cm,这样便可以达到目的;
- (2). 在加减砝码时要轻拿轻放,以免突然掉落到桌上,同时也减小对同桌其他同学实验的影响;
- (3). 实验后数据处理过程中,经与同学讨论,发现在前两组数据中拟合直线没有固定截距为 0 的问题,《新概念基础物理实验讲义》中有一段专门一段话阐释了这种错误。以后在实验数据处理的模型建构方面还要加以小心。

$s_y$  的导出类似于贝塞耳法公式(1.4)。由  $db = \frac{1}{\sum x_i^2} \sum x_i dy_i$  进一步可求出  $s_b$ ：

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - bx_i)^2}{n-1}}, \quad s_b = \frac{s_y}{\sqrt{\sum x_i^2}}, \quad \nu = n-1 \quad (1.27)$$

如果以测得值  $y_{x=0} \neq 0$  而拒绝模型  $y=bx$ , 是对误差普遍性理解不深。模型期望值(约定真值)为 0 和测得值为 0 是两个概念, 式(1.35)能进一步说明这一点。

图 12: 新概念基础物理实验中关于截距为 0 的模型讨论

- (4). 实验中发现实际共振频率始终小于理论共振频率, 有极大可能是砝码有磨损, 质量减少, 从而产生的实际共振频率小于理论值。

## 5 绘图源代码

对于最小二乘法, 其不确定度的计算公式为  $\frac{\sigma(\hat{b})}{|\hat{b}|} = \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{n-2}}$ , 在 python 代码中分别定义  $getR_2()$  与  $getSb()$  函数计算相关系数与相对不确定度

```
from math import sqrt, log
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 全局变量, 相关系数、TINV因子、x,y轴标签
R_2 = 0
TINV = ['0', '12.7062047361747', '4.3026527297495', '3.1824463052837',
        '2.7764451051978', '2.5705818356363', '2.4469118511450',
        '2.3646242515928', '2.3060041352042', '2.2621571627982',
        '2.2281388519863', '2.2009851600916', '2.1788128296672',
        '2.1603686564628', '2.1447866879178', '2.1314495455598',
        '2.1199052992213', '2.1098155778333', '2.1009220402410',
        '2.0930240544083', '2.0859634472659', '2.0796138447277',
        '2.0738730679040', '2.0686576104191', '2.0638985616280',
        '2.0595385527533', '2.0555294386429', '2.0518305164803',
        '2.0484071417952', '2.0452296421327', '2.0422724563012']

xName = ["谐频次数$\mathcal{n}$(个)", "弦长倒数$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{m})^{\mathcal{-1}}$", "拉力对数$\ln\mathcal{T}$", "线密度对数$\ln\lambda$"]
```

```

yName = ["共振频率 $\mathcal{f}$ \ \mathcal{(Hz)}", "共振频率 $\mathcal{f}$ \ \mathcal{(Hz)}", "基频对数 $\ln\mathcal{f}$ ", "基频对数 $\ln\mathcal{f}$ "]

# # f-n 原始数据
# x = range(1,7,1)
# y = [31.2,62.9,95.5,128.4,161.0,194.3]

# # f-L 原始数据
# x = list(range(30,60,5))
# y = [87.70,75.10,65.80,59.00,53.30,48.60]
# for i in range(len(x)):
#     x[i] = 100 / x[i]
# # f-T 原始数据
# x = list(range(1,7,1))
# y = [42.5,61.5,76.3,88.5,98.4,108.9]
# for i in range(len(x)):
#     x[i] = log(1.96 * x[i])
# for i in range(len(y)):
#     y[i] = log(y[i])

# f- $\rho$  原始数据
x = [0.00055,0.00098,0.00191,0.00350,0.00578,0.00936]
y = [127,96.1,65.7,50.3,40.2,31]
for i in range(len(x)):
    x[i] = log(x[i])
for i in range(len(y)):
    y[i] = log(y[i])

# 计算相关系数
def getR_2(x,y,degree):
    coeffs = np.polyfit(x,y,degree)
    p = np.poly1d(coeffs)
    yhat = p(x)
    ybar = np.sum(y) / len(y)
    ssreg = np.sum((yhat - ybar) ** 2)
    sstot = np.sum((y - ybar) ** 2)

```

```

    return ssreg / sstot

def getSb(R_2,length):
    return sqrt((1 / R_2 - 1)/(length - 2))

coef = np.polyfit(x,y,1)
poly1d_fn = np.poly1d(coef)
R_2 = getR_2(x,y,1)
k = str(round(coef[0],4))          # 最小二乘法拟合斜率
b = round(coef[1],4)             # 最小二乘法拟合截距
Sb = float(getSb(R_2,len(x)) * coef[0]) # 计算斜率标准偏差
Ub = Sb * float(TINV[len(x) - 2])    # 计算斜率不确定度

# 对截距 b 转换为字符串正负号的处理
if b > 0:
    b = "+" + str(b)
else:
    b = str(b)

# 调整字体环境
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False # 正常显示负数
plt.rcParams['font.sans-serif'] = 'Times New Roman' # 数字使用罗马字体

# 作出散点和拟合直线
xdraw = np.linspace(min(x),max(x),30)
ydraw = poly1d_fn(xdraw)
plt.plot(xdraw, ydraw, '-', color = 'b', linewidth = 0.5)
plt.plot(x, y, 'r+')
funRe = "$\hat{y}=" + k + "x" + b + "$"

# 标定 x,y 对应物理量
plt.rcParams['font.sans-serif'] = 'Kaiti'
plt.xlabel(xName[3], fontsize = 10)
plt.ylabel(yName[3], fontsize = 10)

# 将拟合直线方程和相关系数“适当”地放在中间（参数需要手调）
middle = (max(x) + min(x)) / 2

```

```
plt.text(middle, 1.05 * poly1d_fn(middle), funRe, fontsize = 10)
plt.text(middle, 1.03 * poly1d_fn(middle), '$r^2=' + str(R_2) + "$")

# 输出在 Latex 中显示正常的拟合结果
print("\quad \quad \quad 线性拟合斜率$k=", round(coef[0], 3), end = "$")
print("\quad \quad 调用Excel中TINV函数", "$t_{0.95,", len(x), "}=", round(float
(TINV[len(x)-2]), 3), "$\par")
print("\quad \quad \quad 斜率标准偏差$s_k=", round(Sb, 3), end = "$")
print("\quad \quad 斜率不确定度为$U_b=", round(Ub, 3), "$\par")

# 保存或者查看生成的图片
plt.savefig("回归拟合图四", dpi = 2000)
plt.show()
```

## 6 原始数据



清华大学  
Tsinghua University

实验原始数据

|                                        |                                                                     |                                                            |                                                      |                                                     |                                                             |                                                      |                                                            |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| (1)                                    | $n = 1$                                                             | 2                                                          | 3                                                    | 4                                                   | 5                                                           | 6                                                    |                                                            |
| 井6弦<br>(蓝)<br>银                        | $f$                                                                 | 31.2 Hz                                                    | 62.9 Hz                                              | 95.5 Hz                                             | 128.4 Hz                                                    | 161.0 Hz                                             | 194.3 Hz                                                   |
|                                        |                                                                     | $l = 50.00 \text{ cm}$                                     | $T = 9.80 \text{ N}$                                 |                                                     | $\rho = 9.36 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ |                                                      |                                                            |
| (2)                                    | $l = 30.0 \text{ cm}$                                               | 35.0 cm                                                    | 40.0 cm                                              | 45.0 cm                                             | 50.0 cm                                                     | 55.0 cm                                              |                                                            |
| 井4弦<br>(绿)                             | $f$                                                                 | 87.7 Hz                                                    | 75.1 Hz                                              | 65.8 Hz                                             | 59.0 Hz                                                     | 53.3 Hz                                              | 48.6 Hz                                                    |
|                                        |                                                                     | $\rho = 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ |                                                      |                                                     |                                                             |                                                      |                                                            |
| (3)                                    | 保持 $L = 50.0 \text{ cm}$ . 使用 井2弦 (蓝)                               |                                                            |                                                      |                                                     |                                                             |                                                      | $\rho = 9.8 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ |
|                                        | $T = 1.96 \text{ N} \cdot t$ $t$ 为所加砝码个数.                           |                                                            |                                                      |                                                     |                                                             |                                                      |                                                            |
|                                        | $t =$                                                               | 1                                                          | 2                                                    | 3                                                   | 4                                                           | 5                                                    | 6                                                          |
|                                        | $f$                                                                 | 42.50 Hz                                                   | 61.50 Hz                                             | 76.30 Hz                                            | 88.50 Hz                                                    | 98.40 Hz                                             | 108.90 Hz                                                  |
| (4)                                    | 保持 $n = 1$ . $L = 50.0 \text{ cm}$ . $T = 9.80 \text{ N}$ 不变 对 6 根线 |                                                            |                                                      |                                                     |                                                             |                                                      |                                                            |
| 井类型                                    | 1                                                                   | 2                                                          | 3                                                    | 4                                                   | 5                                                           | 6                                                    |                                                            |
| $f$                                    | 127.00 Hz                                                           | 96.10 Hz                                                   | 65.70 Hz                                             | 50.30 Hz                                            | 40.20 Hz                                                    | 31.00 Hz                                             |                                                            |
| $\rho$                                 | $5.5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$                 | $9.8 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$        | $1.91 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ | $3.5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ | $5.78 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$        | $9.36 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ |                                                            |
| (5)                                    | 对 $n = 3$ . 井6弦                                                     | $v_s = \frac{2L}{n} f = 31.83 \text{ m/s}$                 |                                                      |                                                     |                                                             | $v_{\text{理}} = \sqrt{T/\rho} = 32.36 \text{ m/s}$   | $\frac{\Delta v}{v} = -1.6\%$                              |
| 对 $T = 5.88 \text{ N}$ . $n = 1$ . 井2. | $v_s = 76.3 \text{ m/s}$                                            |                                                            |                                                      |                                                     | $v_{\text{理}} = \sqrt{T/\rho} = 77.46 \text{ m/s}$          | $\frac{\Delta v}{v} = -1.5\%$                        |                                                            |

陈荣 3-20

陈荣 3-20

图 13: 弦振动实验原始数据

