清华大学 21-22 春季学期，新生数理基础大赛，非数学组答案

为了保证您的解题体验，请仔细阅读以下内容：
1. 本次考试旨在引导同学们用已学的微积分和线性代数知识解决一些有趣的数学问题或者实际问题。相比较课程考试，本竞赛将更侧重于扎实的基本功而非技巧的积累水平。
2. 本次考试某些小题会出现 * 标记，表示本题难度可能相较于其他题更高。
3. 本次考试某些小题会有提示，对你解题有所启发，但并不要求解法在考纲范围内，请不要被束缚住手脚。
4. 另外，考试题大多为具有多个小题的题目，允许后续题目直接使用前面题目的结论，即使前面有题目未完成。
5. 本卷题量较大，不同部分之间没有联系，请自行把握解题顺序。

希望这套试卷可以带给大家前所未有的数学竞赛体验，也预祝大家在这场比赛之中取得好成绩！

本次考试分为微积分 1 综合、多元微分、含参积分/级数、线性代数综合四个部分，共 6 页，总计 100 分

A. 微积分 1：Stirling 公式

（摘自于品老师 Analysis123）

历史上, Wallis 研究过如下的定积分

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

很明显, $I_0=\frac{\pi}{2}, I_1=1$ 。由于 $\sin x \leqslant 1$, 我们知道 $\{I_n\}_{n\geqslant 1}$ 是单调递减的。我们利用积分的基本技术来推理数列 $\{I_n\}_{n\geqslant 1}$ 的递归关系:

$$\begin{aligned} I_{n+2}-I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\left(-\cos^2 x\right) dx=-\frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d\left(\sin^{n+1} x\right) \\ &=-\left.\frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1} \cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n+1} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx}_{I_{n+2}} .\end{aligned}$$

从而, 我们得到递推公式

$$I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2} I_n$$

236 据此, 我们就可以得到

$$I_{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}, \quad I_{2p+1}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

由于 $\{I_n\}_{n\geqslant 1}$ 是单调递减的, 所以

$$\frac{n+1}{n+2}=\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant 1.$$

从而, $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}=1$ 。另外, 根据上面的计算, 我们还知道

$$I_{2p} I_{2p+1}=\frac{\pi}{2(2p+1)}$$

根据这些结果, 我们考虑序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, 其中

$$x_n=\sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n.$$

所以, $\frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} \geqslant 1$, 所以这是一个在奇数项或者偶数项递增的序列。再根据

$$x_{2p}x_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1},$$

我们很容易得到 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, 所以

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \text{ 即} \lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1.$$

这就是所谓的 Wallis 积分的渐进公式。我们现在用 Wallis 积分的计算来推导 Stirling 公式: 考虑数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, 其中

$$a_n = \frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

我们要证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2\pi}$ 。我们先比较相邻的两项:

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \log\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

我们要来证明 $\log\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > 0$ 。为此, 考虑 $\frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上的图像 Γ 。我们注意到这是凸函数（算二阶导数), 所以 Γ 在它在 $\frac{a+b}{2}$ 处的切线的上方, 并且 Γ 在 a 和 b 处两点的连线的下方:

通过观察面积, 我们知道

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(b-a) > \int_a^b \frac{1}{x} > \frac{1}{\frac{a+b}{2}}(b-a).$$

令 $b=n+1, a=n$, 后一个不等式给出了 $\log\frac{a_n}{a_{n+1}} > 0$, 从而数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 是递减。特别地, 它有极限。根据 Wallis 积分的计算, 我们有

$$\sqrt{2(2p+1)}I_{2p+1} = \sqrt{2(2p+1)}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \to \sqrt{\pi}.$$

从而,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}}$$

由于 a_n 的极限存在, 所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} - \sqrt{2\pi}.$$

我们得到 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

B. 多元微分：曲线族的包络线（25’）

B1) 由于 $F(x,y,t)=0$ 且 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ 不同时为 0（不妨设 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 非零），由隐函数定理，可以局部确定隐函数 $x=x(y,t)$，代入 $\frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)=0$ 得到常微分方程，可以解出平面上曲线 $y=y(t), x=x(y(t),t)$。

*B2) $F(x,y,t)=0$ 两边对 t 求微分得 $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t}=0$，代入第二个方程得 $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=0$。注意到固定 t，$(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y})$ 为曲线 $F(x,y,t)=0$ 的法向量，$(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t})$ 为 B1) 中确定曲线的切向量，从而两曲线相切。

B3) 显然。

B4) 计算 $\frac{\partial F}{\partial theta}(x,y,\theta)=0, F(x,y,\theta)=0$，消去 θ 得包络线方程为 $x^2+y^2=p^2$

B5) 参数为线段倾斜角 θ，用截距式易得曲线族方程为 $x\sin\theta-y\cos\theta+a\sin\theta\cos\theta=0,\theta\in[0,2\pi)$

B6) 即求包络线所围成区域内部的面积，同样计算 $\frac{\partial F}{\partial theta}(x,y,\theta)=0, F(x,y,\theta)=0$，得 $x=-a\cos^3\theta, y=a\sin^3\theta$（星形线），面积

$$S=\int_0^{2\pi} y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y\mathrm{d}+x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\pi a^2$$

*B7) 方程组为 $F(x,y,z,t)=0, \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,z,t)=0$

两边对 t 求微分得 $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t}=0$，代入第二个方程得 $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=0$。注意到固定 t，$(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})$ 为曲面 $F(x,y,z,t)=0$ 的法向量，与确定曲面的切向量均垂直，从而两曲面相切。

以下 C 部分的两题请根据自身情况选做一题

C. 含参积分：Fresnel 积分 (25')

容易计算

$$\int_0^\infty e^{-at}\sin t\ \mathrm{d}t=\frac{1}{1+a^2}$$

由于

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\ \mathrm{d}u=(\int_0^\infty e^{-u^2}\ \mathrm{d}u\int_0^\infty e^{-v^2}\ \mathrm{d}v)^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}\ \mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$

从而

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\ \mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

对于 $t>0$，代换 $x=u\sqrt{t}$ 得

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}\ \mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

从而 $\forall a>0$，

$$\int_0^\infty\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-at}\ \mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-at}e^{-tu^2}\sin t\mathrm{d}u\ \mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-at}e^{-tu^2}\sin t\mathrm{d}t\ \mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}u}{1+(a+u^2)^2}$$

其中积分号可交换是因为：$e^{-at}e^{-tu^2}$ 对 u 一致单调递减趋于 0，且 $\int_0^M sint\mathrm{d}t$ 有界，由 Dirichlet 判别法知积分一致收敛。

进一步地，当 $t\le 1$ 时，$|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-at}|\le\sqrt{t}$ 在 0 附近积分一致收敛；当 $t>1$ 时，$\int_1^M\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t=-\frac{\cos M}{\sqrt{M}}+\cos 1-\int_1^M\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}$，且 $\int_1^M\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}$ 收敛，知 $\int_1^M\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ 收敛，而 e^{-at} 一致有界，由 Abel 判别法知 $\int_0^\infty\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-at}\ \mathrm{d}t$ 对 $a>0$ 一致收敛，从而在 0 处连续，令 $a=0$ 得

$$\int_0^\infty\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$$

注意到

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = (\text{作}u=\frac{1}{t}\text{代换})\int_0^\infty \frac{u^2\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}(u-\frac{1}{u})}{2+(u-\frac{1}{u})^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

所以

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

另外，观察到 $\int_0^\infty e^{-at}\cos t\ \mathrm{d}t = \frac{a}{1+a^2}$ 及 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \int_0^\infty \frac{u^2\mathrm{d}u}{1+u^4}$，得

$$\int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

C. 级数敛散性判定：随机游走 (25')

（摘自吴昊老师概率论讲义）

显然得到

$$p_1(2n) = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} 2^{-2n}.$$

$p_1(2n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ 直接由 Stirling 公式得到：

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

要使 $S_{2n}=0$，存在 $m\in\{0,1,\ldots,n\}$ 使得其中有向上 m 步，m 向下步，$n-m$ 向左步，$n-m$ 向右步。因此

$$p_2(2n) = 4^{-2n}\sum_m \frac{(2n)!}{(m!(n-m)!)^2} = 4^{-2n}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}\sum_m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}^2 = 4^{-2n}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^2 = p_1(2n)^2$$

要使 $S_{2n}=0$，存在 $j,k\in\{0,1,\ldots,n\}$ 使得其中有向上 j 步，向下 j 步，向左 k 步，向右 k 步，向前 $n-j-k$ 步，向后 $n-j-k$ 步。因此

$$\begin{aligned} p_3(2n) &= 6^{-2n}\sum_{j,k}\frac{(2n)!}{(j!k!(n-j-k)!)^2} \\ &= 2^{-2n}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}\sum_{j,k}\left(\frac{3^{-n}n!}{j!k!(n-j-k)!}\right)^2 = p_1(2n)\sum_{j,k}\left(\frac{3^{-n}n!}{j!k!(n-j-k)!}\right)^2 \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{j,k}\frac{3^{-n}n!}{j!k!(n-j-k)!} = 1$$

因此

$$p_3(2n) \leqslant p_1(2n)\max_{j,k}\frac{3^{-n}n!}{j!k!(n-j-k)!}$$

最大值在 j,k 接近于 $n/3$ 时取到（由 Jensen 不等式）。再由 Stirling 公式得

$$\max_{j,k}\frac{3^{-n}n!}{j!k!(n-j-k)!} = O\left(n^{-1}\right)$$

结合 $p_1(2n)$ 的收敛速度，即得结论。

D. 线性代数：在纸上画立方体 (25')

D1) 略

D2) 略

D3) 设 W 有奇异值分解

$$W = P\Sigma Q^{\mathrm{T}} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & \sigma_r & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

设分块矩阵 $V = \begin{bmatrix} W & U \end{bmatrix}$ 则有

$$\begin{aligned} I_k &= VV^{\mathrm{T}} \\ &= WW^{\mathrm{T}} + UU^{\mathrm{T}} \\ &= \left(P\Sigma Q^{\mathrm{T}}\right)\left(P\Sigma Q^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} + UU^{\mathrm{T}} \\ &= P\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} + UU^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

设 $Z = P^{\mathrm{T}}U = (z_{ij})_{k\times(n-m)}$ 则有

$$I_k - \Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}\left(I_k - P\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\right)P = P^{\mathrm{T}}UU^{\mathrm{T}}P = ZZ^{\mathrm{T}}$$

其对角线上的第 $i = 1, \ldots, r$ 个元素为

$$1 - \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{k} z_{ij}^2 \geqslant 0$$

因此有 $0 < \sigma_i \leqslant 1$。进一步，设 $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ 中 1 的重数为 s 则有

$$k - s = \operatorname{rank}\left(I_k - \Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{rank}\left(ZZ^{\mathrm{T}}\right) \leqslant \operatorname{rank} Z \leqslant n - m$$

因此，$s \geqslant k + m - n$。

D4) 由第 3 题的过程可知，只需要构造 $k \times (n-m)$ 矩阵 Z 使得

$$I_k - \Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} = ZZ^{\mathrm{T}}$$

不妨设 W 的奇异值

$$1 = \sigma_1 = \cdots = \sigma_{k+m-n} \geqslant \sigma_{k+m-n+1} \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$$

那么有对角矩阵

$$I_k - \Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} = \operatorname{diag}\left(0, \ldots, 0, 1 - \sigma_{k+m-n+1}^2, \ldots, 1 - \sigma_r^2, 1, \ldots, 1\right)$$

定义 $k \times (n-m)$ 矩阵

$$Z = \begin{bmatrix} O_{k\times(k+m-n)} \\ \operatorname{diag}\left(\sqrt{1 - \sigma_{k+m-n+1}^2}, \ldots, \sqrt{1 - \sigma_r^2}, 1, \ldots, 1\right) \end{bmatrix}$$

那么就有 $I_k - \Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} = ZZ^{\mathrm{T}}$。令矩阵 $U = PZ, V = \begin{bmatrix} W & U \end{bmatrix}$ 则有

$$VV^{\mathrm{T}} = WW^{\mathrm{T}} + UU^{\mathrm{T}} = P\left(\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} + ZZ^{\mathrm{T}}\right)P^{\mathrm{T}} = I_k$$

D5) 略。

D6) 此时的坐标矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算得到 $W^{\mathrm{T}}W$ 的特征值

$$W^{\mathrm{T}}W = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

因此，W 有一个 2 重奇异值 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{6}/2$。由第 5 题的结论可知，由于 $2 \geqslant k + m - n$，存在 $\mathbb{R}^3$ 中的正方体，其一组棱投影得到 w_1, w_2, w_3，此时正方体的棱长为 $\sqrt{6}/2$。

D7) 此时的坐标矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算得到 $W^{\mathrm{T}}W$ 的特征值

$$W^{\mathrm{T}}W = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

因此，W 有奇异值 $\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma_2 = 1$。由第 5 题的结论可知，正方体的棱长 $a \geqslant \sqrt{2}$。由于奇异值 a 的重数最多为 1，

$$k + m - n \leqslant 1 \implies n \geqslant k + m - 1 = 4$$

上式中的等号成立，当且仅当 $n = 4$，对应的 $a = \sqrt{2}$。因此，n 的最小值为 4，此时该正方体的棱长为 $\sqrt{2}$。