

弦振动实验

姓名: 鲁睿 班级: 未央-软 11 学号: 2021012539

实验时间: 2022 年 3 月 30 日 下午 实验编号: 16 号

摘 要

本实验从理论上分析末端边界反射性质, 借助弦振动方程推导出弦振动共振频率对应计算公式。从实验上观察在信号发生器弦在弦线上的传播现象, 使用单一变量法, 在固定其他变量的情况下, 分别探究 f 与 n, L, T, ρ 的关系, 并使用最小二乘法拟合直线, 结果表明在误差 $\pm 3\%$ 以内, 实验公式中各变量的拟合幂次与理论幂次相同。同时计算了弦上传播的理论速度和实际速度, 两者误差在 $\pm 3\%$ 区间内。

使用 python 中数据分析库 numpy 以及绘图库 matplotlib 整理并处理实验测量数据, 数据结果与 Excel 软件结果相同, 可减少重复性的工作量。

关键词: 波动方程; 驻波; 共振; 最小二乘法

目 录

1	实验目的	3
2	实验仪器	3
3	实验内容	4
3.1	实验原理	4
3.2	实验步骤	6
3.3	数据处理	6
4	讨论	13
5	绘图源代码	14
6	原始数据	18

插 图

1	弦振动推导	4
2	两端固定弦的驻波波形示意图	5
3	弦振动实验仪器连接图	6

4	f 与 n 线性回归拟合图 (最小二乘法)	7
5	对照 excel 表结果	7
6	采用截距为 0 拟合频率与谐频次数直线	8
7	f 与 $\frac{1}{L}$ 线性回归拟合图 (最小二乘法)	9
8	采用截距为 0 拟合频率与弦长倒数直线	9
9	$\ln f$ 与 $\ln T$ 线性回归拟合图 (最小二乘法)	10
10	$\ln f$ 与 $\ln \rho$ 线性回归拟合图 (最小二乘法)	11
11	李萨如图形	13
12	新概念基础物理实验中关于截距为 0 的模型讨论	14
13	弦振动实验原始数据	18

表格

1	弦振动实验仪器	3
2	弦线编号与定位柱颜色的对应关系以及线密度值	3
3	固定弦长、种类、张力不变, f 与谐频次数 n 的关系	7
4	固定种类、张力、谐频次数不变, f 与弦长 L 的关系	8
5	固定种类、弦长、谐频次数不变, f 与张力 T 的关系	10
6	固定弦长、张力、谐频次数不变, f 与线密度 ρ 的关系	10

1 实验目的

- (1) 观测弦振动，学习如何使用示波器测量共振频率；
- (2) 使用单一变量法，研究弦振动共振频率与各参数之间的关系；
- (3) 通过最小二乘法以及对数法定量计算各物理量之间的关系；
- (4) 使用 python 编程语言线性拟合以及作图。

2 实验仪器

名称	型号	参数	精度
弦振动实验仪器	Bunker	600 mm	1 mm
DOS 函数信号发生器	TFG1005	0 ~ 20Vpp 0.03Hz ~ 6 × 10 ⁶ Hz	0.001Vpp 0.03Hz ~ 6 × 10 ⁶ Hz
示波器	TDS1012C	60 MHz, 1 GS/s	0.01Vpp, 0.01Hz
弦 (6 根)	未知	见表 2	无
砝码 (6 个)	未知	200g	无
尼龙绳 (1 根)	未知	34.3cm	无

表 1: 弦振动实验仪器

其中六根弦对应定位柱颜色对应关系以及线密度值见下表:

弦线编号及对应定位柱颜色	线密度 (kg/m)
6 # (银)	0.00936
5 # (金)	0.00578
4 # (绿)	0.00350
3 # (黑)	0.00191
2 # (蓝)	0.00098
1 # (红)	0.00055

表 2: 弦线编号与定位柱颜色的对应关系以及线密度值

3 实验内容

3.1 实验原理

1 波速公式的导出

假设一根均匀半无限长柔软的弦线被拉紧，弦线中的张力为 T 。在一端加以垂直方向的振动激励之后，由张力作用，始端弦线的振动将带动它的邻段，而邻段又带动它自己的邻段……如此链式地传播到整根弦。

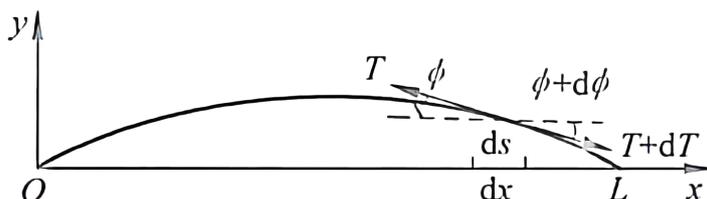


图 1: 弦振动推导

在弦作横向小振动的某时刻，设长度为 ds 的线元处于上图 1 所示状态，其中 y 表示位移， T 表示弦上张力， x 表示弦上线元的位置坐标。线元质量为 ρds ，由于线元 ρds 未受其他外力，它在 y 方向的受力平衡，忽略弦的重力影响时可得运动方程

$$\left(T + \frac{dT}{ds} ds\right) \sin\left(\phi + \frac{d\phi}{ds} ds\right) - T \sin\phi = (\rho ds) \frac{d^2 y}{dt^2}$$

对于小振动，近似式 $ds \approx dx$ 和 $\sin\phi \approx \phi \approx \tan\phi = \frac{dy}{dx}$ ，从而化为可以分离变量的二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

该偏微分方程的通解为 $y(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt)$ ，为两个向左向右传播函数的叠加，其中波速 v 为

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

可知，振动在线上传播的速率 v 仅与弦参数 T 和 ρ 有关

2 反射现象以及边界条件

在边界上振动传播时，由于边界固定，从而反射回来的波与原来波相位相差 π ，这样能够保证在端点处是严格固定的。也可以通过数学推导得到，假设入射波为沿正 x

方向传播的波，波动方程为 $y^+ = f(vt - x)$ 。反射波为负 x 方向传播的波，波形为 $y^- = f(vt + x)$ 。入射波和反射波叠加得到驻波方程

$$y(t, x) = y^+ + y^- = f(vt - x) + f(vt + x)$$

代入边界条件 $y(t, x)|_{x=L} = 0$ ，可得 $y^-|_L = -y^+|_L$ ，即弦线末端处 $t = t_0$ 时刻反射波的幅度与入射波大小相同、方向相反，二者完全抵消。

3 弦在正弦激励下的驻波现象

实验过程中使用正弦波激励吉他弦，设有同振幅（假设能量不会损失）、同频率的两列平面简谐波，沿 x 轴正方向和负方向传播。它们的波动方程分别为

$$y_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad y_2 = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x + \Delta\varphi\right)$$

代入 $x = 0$ 处边界条件得 $\Delta\varphi = \pi$ ，则合成波的表达式 $y = y_1 + y_2 = -2A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \omega t$ 从该表达式可以看出，只要固定驻波上的位置，该位置上的振幅为定值且 $\in [0, 2A]$ ，振动频率与原频率相同。

再代入 $x = L$ 处边界条件有 $\sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L = 0 \implies \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$ ，得到 $L = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 1, 2, \dots$ 结合波速表达式以及 $v = f\lambda$ 得到以下共振频率的表达式

$$f = \frac{n}{2L} v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

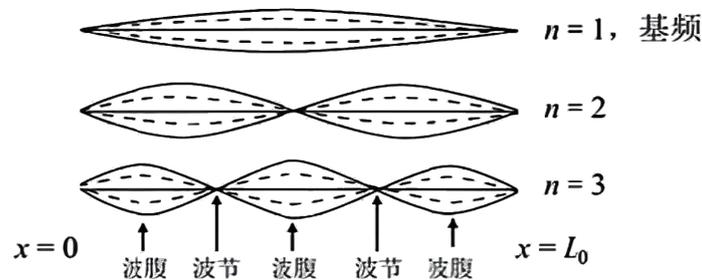


图 2: 两端固定弦的驻波波形示意图

对应驻波形态如下图所示

3.2 实验步骤

- (1). 选择实验所需要的弦，弦右侧颜色定位端靠近滑轮处，使用尼龙绳一侧的挂钩相连。弦的左端穿过左侧蝶形螺母上的小孔并旋转螺母固定。细绳绕过两个滑轮后挂上砝码钩以施加适当的张力。
- (2). 调整两个弦码至合适的位置、并用标尺测定两个弦码之间的距离作为弦的长度（固定或改变弦长 L ）。
- (3). 逐一增减放在砝码钩上的砝码数量，尽量维持系统稳定；

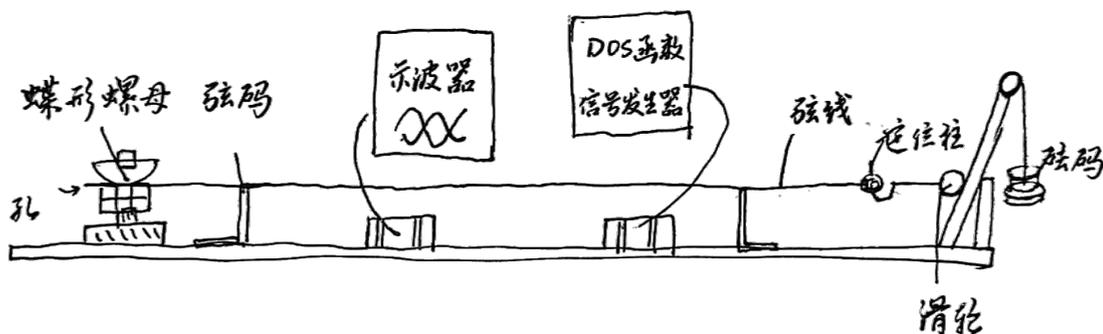


图 3: 弦振动实验仪器连接图

- (4). 驱动线圈和接受线圈分别与信号发生器和示波器连接，检查连接处是否发生松动，设置信号发生器正弦信号峰峰值 $V_m \sim 5v$ ，并调整频率 $f \sim 100Hz$ ，示波器上出现稳定的激励正弦信号（黄色）；
- (5). 保证驱动线圈与接受线圈至少保持 $10cm$ 的距离，缓慢调整信号发生器的输出频率 ($10 \sim 200Hz$)，观察接受正弦信号（蓝色）振幅从小到大再到小，在极值点附近微调，使示波器上接受到的波形为清晰的正弦信号且幅度最大；
- (6). 记录当前示波器频率对应当前系统状态的共振频率。

3.3 数据处理

(1) 观察弦的振动，分析 $f \sim n$ 关系

在本实验中，选取 #6 弦（银色），固定弦长 $L = 50.0 \text{ cm}$ 、张力 $T = 9.80 \text{ N}$ （5 个砝码），形成 $n = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6$ 的驻波，测量共振频率 $f = f(n)$ ，实验数据如下：

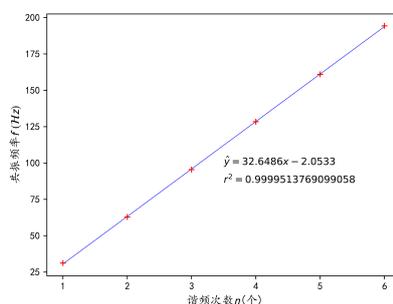
谐频次数 (个)	1	2	3	4	5	6
共振频率 (Hz)	31.20	62.90	93.50	128.40	161.00	194.30

表 3: 固定弦长、种类、张力不变, f 与谐频次数 n 的关系

使用 python 编程计算拟合斜率及其不确定度, 回归结果以及相应作图如下:

线性拟合斜率 $k = 32.649$ 调用 Excel 中 TINV 函数 $t_{0.95, 5} = 2.776$

斜率标准偏差 $s_k = 0.114$ 斜率不确定度为 $U_b = 0.316$ 5

图 4: f 与 n 线性回归拟合图 (最小二乘法)

这与 Excel 表计算结果在小数点后 12 位均相同, excel 表对应结果如下图所示:

	A	B	C
5	1	31.2	
6	2	62.9	
7	3	95.5	
8	4	128.4	
9	5	161	
10	6	194.3	
11	标准偏差	0.11383	
12	TINV因子	2.77645	
13	不确定度	0.31605	
14			

图 5: 对照 excel 表结果

但是, 由于理论公式要求无截距, 上述拟合方法没有对深刻理解误差理论, 重新作图如下:

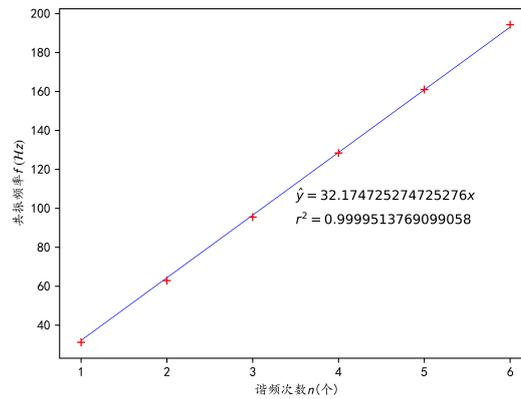


图 6: 采用截距为 0 拟合频率与谐频次数直线

截距为 0 时的拟合斜率结果为 $(32.174 \pm 0.4) \text{ Hz}$, 代入理论数据, $k_{theory} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2 \times 0.5 \text{ m}} \sqrt{\frac{9.8 \text{ N}}{9.36 \times 10^{-3} \text{ kg/m}}} = 32.358 \text{ Hz}$, 在 $32.1 \pm 0.4 \text{ (Hz)}$ 范围内, 误差为 0.6 %

注意有效数字和修约规则

(2) 观察弦的振动, 分析 $f \sim L$ 关系

在本实验中, 选取 #4 弦 (绿色), 固定张力 $T = 9.80 \text{ N}$ (5 个砝码), 等距变化弦长 L , 测量 $n = 1$ 时的基频频率 $f = f(L)$, 实验数据如下:

弦长 (cm)	30.0	35.0	40.0	45.0	50.0	55.0
基频 (Hz)	87.70	75.10	65.80	59.00	53.30	48.60

表 4: 固定种类、张力、谐振次数不变, f 与弦长 L 的关系

计算最小二乘法斜率以及其不确定度以及作图如下:

线性拟合斜率 $k = 25.718$ 调用 Excel 中 TINV 函数 $t_{0.95,6} = 2.776$
 斜率标准偏差 $s_k = 0.219$ 斜率不确定度为 $U_b = 0.608$

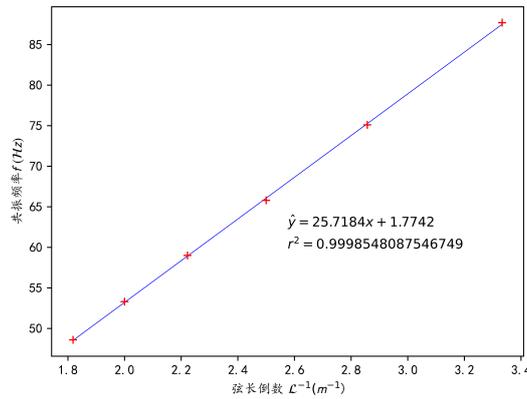


图 7: f 与 $\frac{1}{L}$ 线性回归拟合图 (最小二乘法)

同理，固定截距 $b = 0$ ，重新作图如下：

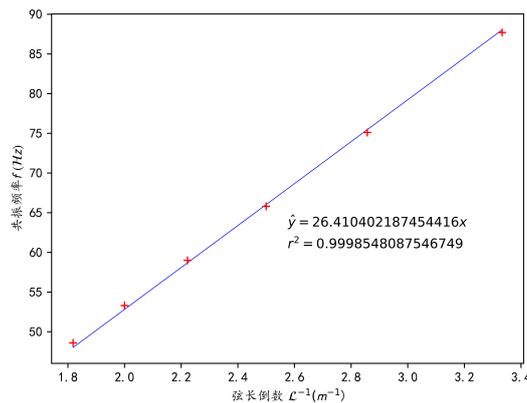


图 8: 采用截距为 0 拟合频率与弦长倒数直线

代入理论数据， $k_{theory} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9.8N}{3.50 \times 10^{-3}kg/m}} = 26.46Hz$ ，如果采用没有固定 $b = 0$ 时的数据结果 $25.7 \pm 0.6(Hz)$ 范围相比略微偏大，但在修正截距为 0 后，结果为 $26.4 \pm 0.5(Hz)$ ，误差为 0.2%，说明固定截距为 0 的合理性。

(3) 分析 $f \sim T$ 关系

在本实验中，选取 #2 弦（蓝色），固定弦长 $L = 50.0\text{ cm}$ ，改变砝码个数，每个砝码 $G = m_0g = 1.96N$ ，即在 $1.96N \sim 11.76N$ 之间改变拉力，测量 $n = 1$ 时的基频 $f = f(T)$ ，实验数据如下：

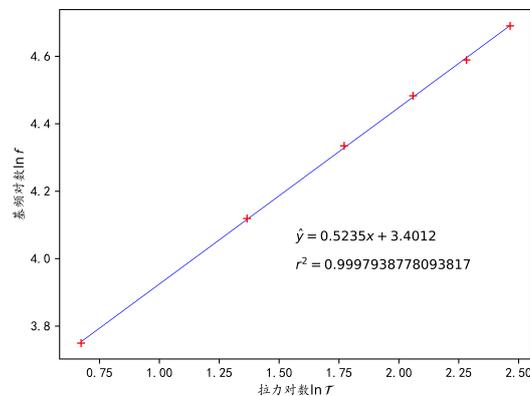
拉力 (kg/m)	0.00055	0.00098	0.00191	0.00350	0.00578	0.00936
基频 (Hz)	42.5	61.5	76.3	88.5	98.4	108.9

表 5: 固定种类、弦长、谐振次数不变, f 与张力 T 的关系

计算最小二乘法斜率以及其不确定度以及作图如下:

线性拟合斜率 $k = 0.513$ 调用 Excel 中 TINV 函数 $t_{0.95,6} = 2.776$

斜率标准偏差 $s_k = 0.005$ 斜率不确定度为 $U_b = 0.015$

图 9: $\ln f$ 与 $\ln T$ 线性回归拟合图 (最小二乘法)

由理论公式取对数得 $\ln f = \ln n + \frac{1}{2} \ln T - \ln L - \frac{1}{2} \ln \rho - \ln 2$, 从而理论斜率为 $\frac{1}{2}$, 这与拟合直线斜率 0.513 相对误差为 $\frac{0.513 - 0.5}{0.5} \approx 2.6\%$

(4) 分析 $f \sim \rho$ 关系

在本实验中, 固定弦长 $L = 50.0$ cm, 拉力 $T = 9.8$ N, 改变弦的种类 (#1 ~ #6), 测量不同弦在 $n = 1$ 时的基频 $f = f(\rho)$, 实验数据如下:

线密度 (N)	1.96	3.92	5.88	7.84	9.8	11.76
基频 (Hz)	42.5	61.5	76.3	88.5	98.4	108.9

表 6: 固定弦长、张力、谐振次数不变, f 与线密度 ρ 的关系

计算最小二乘法斜率以及其不确定度以及作图如下:

线性拟合斜率 $k = -0.495$ 调用 Excel 中 TINV 函数 $t_{0.95,6} = 2.776$

斜率标准偏差 $s_k = -0.013$ 斜率不确定度为 $U_b = -0.036$

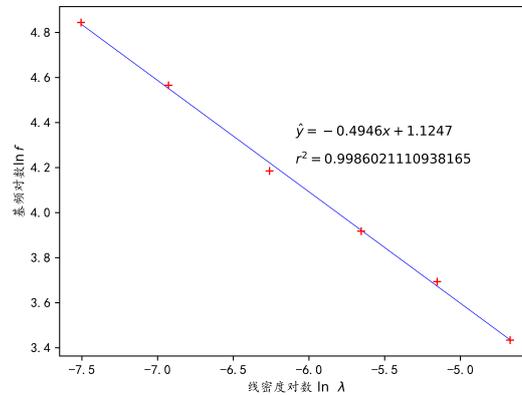


图 10: $\ln f$ 与 $\ln \rho$ 线性回归拟合图 (最小二乘法)

由理论公式取对数得 $\ln f = \ln n + \frac{1}{2} \ln T - \ln L - \frac{1}{2} \ln \rho - \ln 2$, 从而理论斜率为 $-\frac{1}{2}$, 这与拟合直线斜率 -0.4946 相对误差为 $\frac{-0.4946 + 0.5}{-0.5} \approx 1.1\%$

(5) 分析弦的线密度、弦长、张力、基频与波速的关系

选取 (1)-(4) 部分得到的部分实验数据, 计算弦上振动的传播速度实验值 $v = f\lambda = \frac{2L}{n}f$ 及理论值 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, 并比较相对偏差。

(1). 取 $n = 1, T = 5.88\text{N}, L = 50.0\text{cm}$, # 2 弦 (蓝色), 计算 $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.500\text{m}}{1} \cdot 76.30\text{Hz} \approx 76.30\text{m/s}$, 以及 $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{5.88\text{N}}{9.8 \times 10^{-4}\text{kg/m}}} \approx 77.46\text{m/s}$, 两者相对误差 $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{76.30\text{m/s} - 77.46\text{m/s}}{77.46\text{m/s}} \approx -1.5\%$

(2). 取 $n = 1, T = 9.8\text{N}, L = 35.0\text{cm}$, # 4 弦 (绿色), 计算 $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.350\text{m}}{1} \cdot 75.10\text{Hz} \approx 52.57\text{m/s}$, 以及 $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.8\text{N}}{3.50 \times 10^{-3}\text{kg/m}}} \approx 52.92\text{m/s}$, 两者相对误差 $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{52.57\text{m/s} - 52.92\text{m/s}}{52.92\text{m/s}} \approx -0.7\%$

(3). 取 $n = 2, T = 9.8\text{N}, L = 50.0\text{cm}$, # 6 弦 (蓝色), 计算 $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.500\text{m}}{2} \cdot 62.90\text{Hz} \approx 31.45\text{m/s}$, 以及 $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.8\text{N}}{9.36 \times 10^{-3}\text{kg/m}}} \approx 32.36\text{m/s}$, 两者相对误差 $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{31.45\text{m/s} - 32.36\text{m/s}}{32.36\text{m/s}} \approx -2.8\%$

- (4). 取 $n = 3, T = 9.8\text{N}, L = 50.0\text{cm}$, # 6 弦 (银色), 计算 $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.500\text{m}}{3} \cdot 95.50\text{Hz} \approx 31.83\text{m/s}$, 以及 $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.8\text{N}}{9.36 \times 10^{-3}\text{kg/m}}} \approx 32.36\text{m/s}$, 两者相对误差 $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{31.83\text{m/s} - 32.36\text{m/s}}{32.36\text{m/s}} \approx -1.6\%$
- (5). 取 $n = 5, T = 9.8\text{N}, L = 50.0\text{cm}$, # 6 弦 (银色), 计算 $v_{\text{reality}} = \frac{2L}{n} \cdot f = \frac{2 \cdot 0.500\text{m}}{5} \cdot 161.00\text{Hz} \approx 32.30\text{m/s}$, 以及 $v_{\text{theory}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{9.8\text{N}}{9.36 \times 10^{-3}\text{kg/m}}} \approx 32.36\text{m/s}$, 两者相对误差 $\delta = \frac{v_{\text{reality}} - v_{\text{theory}}}{v_{\text{theory}}} = \frac{32.30\text{m/s} - 32.36\text{m/s}}{32.36\text{m/s}} \approx -0.2\%$

可见, 实验数据基本上满足实际值小于理论值, 可能为实验次数过多, 砝码磨损导致实际拉力较小, 从而产生的实际共振频率小于理论值。

(6) 实验操作

为了方便地激发和测量弦振动现象, 激励线圈和探测线圈应如何放置?

- (1). 由于在两固定点之间有可能存在波腹和波节, 对于 $n \geq 2$ 时, 弦上存在简谐运动振幅为 0 的点, 在摆放探测线圈时, 要避免将探测线圈放在 $\frac{i}{n}L, i = 1, 2, \dots, n-1$ 位置处;
- (2). 在实验过程中, 发现当探测线圈和激励线圈靠得比较近时, 探测线圈显示信号和激励线圈信号几乎重合, 两者相互靠近会产生电磁干扰, 进而导致测量不准确。在测量过程中, 保持两个线圈之间的距离 $10\text{cm} \sim 15\text{cm}$, 使测量更加准确;
- (3). 避免让弦与线圈距离过近, 否则弦的振动可能会受影响 (肉眼可见弦振动幅度在 mm 量级)

(7) 实验技巧

如何快速找到一定实验条件下弦振动的共振频率? 总结一下你在实验中采用的方法。

- (1). 放上砝码后, 可以用手轻轻搭在砝码上起到“减震器”的作用, 让波形更加稳定;
- (2). 先通过计算理论值, 然后在理论值附近分度值由大到小进行调整, 从 $10\text{Hz}, 1\text{Hz}, 0.1\text{Hz}$ 进行调整, 越接近最大值, 相邻两次调整时间相应增加, 使弦振动更加稳定;

- (3). 经过一系列尝试, 发现激励线圈产生的波形几乎不变化。如果将探测线圈接受到的波形水平“压缩”到 y 轴形成一根比较明亮的线, 这样只需要看这条线长度的增减即可调整共振频率; 或者将两者直接合成在一起, 由于激励和接受线圈形成的正弦波有稳定的相位差, 从而会形成一个斜椭圆的李萨如图形, 适当调整接受线圈的位置使该李萨如图形为一根直线, 通过调整共振频率使得该直线斜率达到最大值或者最小值。

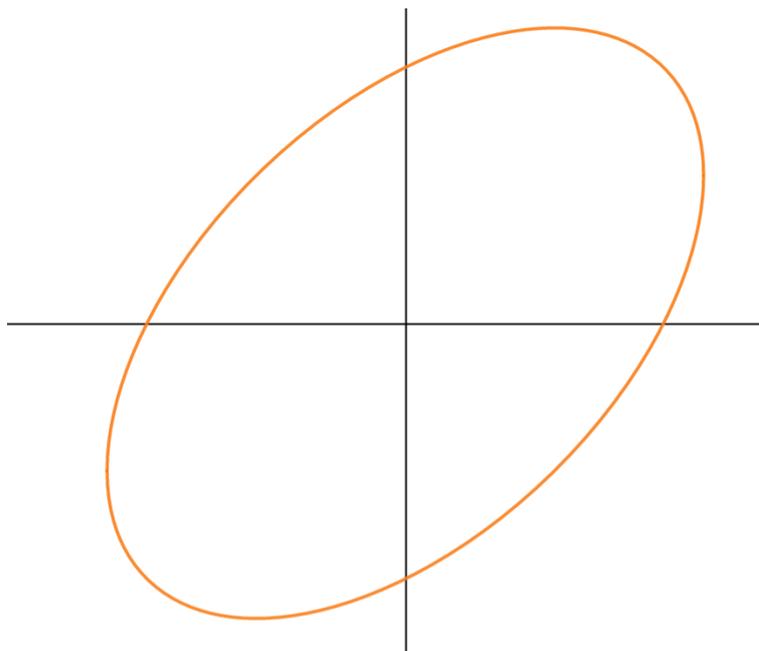


图 11: 李萨如图形

4 讨论

- (1). 在实验 (2) 过程中, 需要将弦长加到 55.0cm, 此时若只调整两侧的 L 型定位柱不能达到目的, 想到的方法为 3cm - 58cm, 这样便可以达到目的;
- (2). 在加减砝码时要轻拿轻放, 以免突然掉落到桌上, 同时也减小对同桌其他同学实验的影响;
- (3). 实验后数据处理过程中, 经与同学讨论, 发现在前两组数据中拟合直线没有固定截距为 0 的问题, 《新概念基础物理实验讲义》中有一段专门一段话阐释了这种错误。以后在实验数据处理的模型建构方面还要加以小心。

s_y 的导出类似于贝塞耳法公式(1.4)。由 $db = \frac{1}{\sum x_i^2} \sum x_i dy_i$ 进一步可求出 s_b ：

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - bx_i)^2}{n-1}}, \quad s_b = \frac{s_y}{\sqrt{\sum x_i^2}}, \quad \nu = n-1 \quad (1.27)$$

如果以测得值 $y_{x=0} \neq 0$ 而拒绝模型 $y=bx$, 是对误差普遍性理解不深。模型期望值(约定真值)为 0 和测得值为 0 是两个概念, 式(1.35)能进一步说明这一点。

图 12: 新概念基础物理实验中关于截距为 0 的模型讨论

- (4). 实验中发现实际共振频率始终小于理论共振频率, 有极大可能是砝码有磨损, 质量减少, 从而产生的实际共振频率小于理论值。

5 绘图源代码

对于最小二乘法, 其不确定度的计算公式为 $\frac{\sigma(\hat{b})}{|\hat{b}|} = \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{n-2}}$, 在 python 代码中分别定义 $getR_2()$ 与 $getSb()$ 函数计算相关系数与相对不确定度

```
from math import sqrt, log
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 全局变量, 相关系数、TINV因子、x,y轴标签
R_2 = 0
TINV = ['0', '12.7062047361747', '4.3026527297495', '3.1824463052837',
        '2.7764451051978', '2.5705818356363', '2.4469118511450',
        '2.3646242515928', '2.3060041352042', '2.2621571627982',
        '2.2281388519863', '2.2009851600916', '2.1788128296672',
        '2.1603686564628', '2.1447866879178', '2.1314495455598',
        '2.1199052992213', '2.1098155778333', '2.1009220402410',
        '2.0930240544083', '2.0859634472659', '2.0796138447277',
        '2.0738730679040', '2.0686576104191', '2.0638985616280',
        '2.0595385527533', '2.0555294386429', '2.0518305164803',
        '2.0484071417952', '2.0452296421327', '2.0422724563012']

xName = ["谐频次数$\mathcal{n}$(个)", "弦长倒数$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{m})^{\mathcal{L}^{-1}}$", "拉力对数$\ln\mathcal{T}$", "线密度对数$\ln\lambda$"]
```

```

yName = ["共振频率 $\mathcal{f}$ \ \mathcal{(Hz)}", "共振频率 $\mathcal{f}$ \ \
          \mathcal{(Hz)}", "基频对数 $\ln\mathcal{f}$ \ \
          \mathcal{(Hz)}", "基频对数 $\ln\mathcal{f}$ \ \
          \mathcal{(Hz)}"]

## f-n 原始数据
# x = range(1,7,1)
# y = [31.2,62.9,95.5,128.4,161.0,194.3]

## f-L 原始数据
# x = list(range(30,60,5))
# y = [87.70,75.10,65.80,59.00,53.30,48.60]
# for i in range(len(x)):
#     x[i] = 100 / x[i]
## f-T 原始数据
# x = list(range(1,7,1))
# y = [42.5,61.5,76.3,88.5,98.4,108.9]
# for i in range(len(x)):
#     x[i] = log(1.96 * x[i])
# for i in range(len(y)):
#     y[i] = log(y[i])

# f- $\rho$  原始数据
x = [0.00055,0.00098,0.00191,0.00350,0.00578,0.00936]
y = [127,96.1,65.7,50.3,40.2,31]
for i in range(len(x)):
    x[i] = log(x[i])
for i in range(len(y)):
    y[i] = log(y[i])

# 计算相关系数
def getR_2(x,y,degree):
    coeffs = np.polyfit(x,y,degree)
    p = np.poly1d(coeffs)
    yhat = p(x)
    ybar = np.sum(y) / len(y)
    ssreg = np.sum((yhat - ybar) ** 2)
    sstot = np.sum((y - ybar) ** 2)

```

```
    return ssreg / sstot

def getSb(R_2,length):
    return sqrt((1 / R_2 - 1)/(length - 2))

coef = np.polyfit(x,y,1)
poly1d_fn = np.poly1d(coef)
R_2 = getR_2(x,y,1)
k = str(round(coef[0],4))          # 最小二乘法拟合斜率
b = round(coef[1],4)            # 最小二乘法拟合截距
Sb = float(getSb(R_2,len(x)) * coef[0]) # 计算斜率标准偏差
Ub = Sb * float(TINV[len(x) - 2])    # 计算斜率不确定度

# 对截距 b 转换为字符串正负号的处理
if b > 0:
    b = "+" + str(b)
else:
    b = str(b)

# 调整字体环境
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False # 正常显示负数
plt.rcParams['font.sans-serif'] = 'Times New Roman' # 数字使用罗马字体

# 作出散点和拟合直线
xdraw = np.linspace(min(x),max(x),30)
ydraw = poly1d_fn(xdraw)
plt.plot(xdraw, ydraw, '-', color = 'b', linewidth = 0.5)
plt.plot(x, y, 'r+')
funRe = "$\hat{y}=" + k + "x" + b + "$"

# 标定 x,y 对应物理量
plt.rcParams['font.sans-serif'] = 'Kaiti'
plt.xlabel(xName[3], fontsize = 10)
plt.ylabel(yName[3], fontsize = 10)

# 将拟合直线方程和相关系数“适当”地放在中间（参数需要手调）
middle = (max(x) + min(x)) / 2
```

```
plt.text(middle, 1.05 * poly1d_fn(middle), funRe, fontsize = 10)
plt.text(middle, 1.03 * poly1d_fn(middle), '$r^2=' + str(R_2) + "$")

# 输出在 Latex 中显示正常的拟合结果
print("\quad \quad \quad 线性拟合斜率$k=", round(coef[0],3),end = "$")
print("\quad \quad 调用Excel中TINV函数", "$t_{0.95,", len(x),"}=", round(float
(TINV[len(x)-2]),3), "$\par")
print("\quad \quad \quad 斜率标准偏差$s_k=", round(Sb,3),end = "$")
print("\quad \quad 斜率不确定度为$U_b=", round(Ub,3), "$\par")

# 保存或者查看生成的图片
plt.savefig("回归拟合图四",dpi = 2000)
plt.show()
```

6 原始数据



清华大学
Tsinghua University

实验原始数据

(1) $n=1$

	1	2	3	4	5	6
#6弦 (蓝) 银	f 31.2Hz	62.9Hz	95.5Hz	128.4Hz	161.0Hz	194.3Hz
	$l=50.00\text{cm}$ $T=9.80\text{N}$ $\rho=9.36 \times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$					

(2)

	1	2	3	4	5	6
#4弦 (绿)	l 30.0cm	35.0cm	40.0cm	45.0cm	50.0cm	55.0cm
	f 87.7Hz	75.1Hz	65.8Hz	59.0Hz	53.3Hz	48.6Hz
	$\rho=3.5 \times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$					

(3) 保持 $L=50.0\text{cm}$. 使用 #2弦 (蓝) $\rho=9.8 \times 10^{-4}\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$

$T=1.96\text{N} \cdot t$ t 为所加砝码个数

	1	2	3	4	5	6
	x					
	f 42.50Hz	61.50Hz	76.30Hz	88.50Hz	98.40Hz	108.90Hz

(4) 保持 $n=1$. $L=50.0\text{cm}$. $T=9.80\text{N}$ 不变 对 6 根线

#类型	1	2	3	4	5	6
f	127.00 Hz	96.10 Hz	65.70 Hz	50.30 Hz	40.20 Hz	31.00 Hz
ρ	$5.5 \times 10^{-4}\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$	$9.8 \times 10^{-4}\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$	$1.91 \times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$	$3.5 \times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$	$5.78 \times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$	$9.36 \times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$

(5) 对 $n=3$. #6弦 $v_{\text{实}} = \frac{2L}{n} f = 31.83\text{m/s}$ $v_{\text{理}} = \sqrt{T/\rho} = 32.36\text{m/s}$ $\frac{\Delta v}{v} = -1.6\%$
 对 $T=5.88\text{N}$. $n=1$. #2. $v_{\text{实}} = 76.3\text{m/s}$ $v_{\text{理}} = \sqrt{T/\rho} = 77.46\text{m/s}$ $\frac{\Delta v}{v} = -1.5\%$

陈荣 3.20

图 13: 弦振动实验原始数据