

光栅衍射实验报告

鲁睿 未央软-11 2021012539 2022.10.3

摘要: 本实验使用分光计和光栅观察汞灯光谱，推导误差限以选取合适的衍射级数，寻找谱线并在分光计上读数。基于光栅方程，使用垂直入射法计算光栅常数，并在此基础上使用三种方法（垂直入射、斜入射、最小偏向角）测定波长，并与约定真值比较。实验结果表明，分光计调整符合要求，波长测量误差小于1%。

关键词: 衍射光栅; 分光计; 波长; 最小偏向角

目录

1 实验原理

1.1 光栅方程

1.2 最小偏向角

1.3 偏心差消除

2 实验步骤

3 实验内容

3.1 衍射级推导

3.2 光栅常数测定

3.3 波长测定

3.3.1 垂直入射法

3.3.2 斜入射法

3.3.3 最小偏向角法

4 实验总结

4.1 误差分析

4.2 范式分析

5 原始数据

1 实验原理

1.1 光栅方程

平行光射入光栅，入射角为 i ，衍射角为 φ ，由光程差为波长的整数倍

$$d(\sin \varphi \pm \sin i) = m\lambda, m \in Z^+ \quad (1)$$

其中入射光和衍射光分居两侧时取负，否者取正， $i = 0$ 时，为垂直入射时的光栅方程

$$d \sin \varphi_m = m\lambda \quad (2)$$

测量 φ_m 以及给定波长 λ_0 计算光栅常数 d ，再测定其余谱线的 φ_m ，计算对应的 λ 。

1.2 最小偏向角

当光束入射角为 i ，相应 m 级谱线的衍射角为 φ ，由几何关系知

$$\Delta = \varphi + i \quad (3)$$

此时公式 (1) 取正号， Δ 随入射角 i 变化，由对称性 $\varphi = i$ 时 Δ 为极值，此时

$$i = \varphi = \frac{\delta}{2} \quad (4)$$

代入式 (1) 以及相关数学运算可知， δ 为最小偏向角，由此可以反推波长

$$\lambda = \frac{2d \sin \frac{\delta}{2}}{m} \quad (5)$$

1.3 偏心差消除

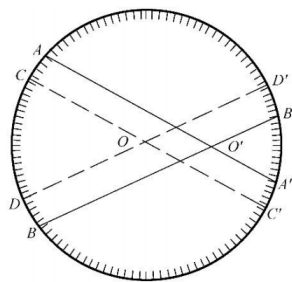


图1 因中心不重合造成的偏心差

由平面几何知识，可知将**两侧取平均**之后，可以消除由于偏心造成的误差

$$\frac{1}{2} \left(\overline{AB} + \overline{A'B'} \right) = \overline{CD} = \overline{C'D'} \quad (6)$$

2 实验步骤

分光计的**调整要求**：

1. 望远镜能够接受平行光
2. 平行光管能够发出平行光
3. 望远镜与平行光管的光轴共轴，且与分光计的中心轴垂直

分光计调节过程中的核心在于**基准法**：

先粗调平行光管和望远镜以及载物台，以平面镜调整目镜清晰度，基于目镜清晰度调整望远镜和载物台平行，基于望远镜发出平行光调整平行光管发出平行光。

光栅参数和波长的测量过程中，**移动望远镜**找到对应的谱线，记录两侧角度的数值（精确到 1'）；最小偏向角的测量中，旋转光栅，当对应谱线**发生“回转”**时微调得到临界点位置，测量平行光入射光以及出射光的角位置。

3 实验内容

本次实验给定**绿光**波长 **546.1nm**，待测**黄光**波长约定值 **579.1nm**，汞灯其他各谱线的波长大小如下

颜色	紫		绿	黄	红	
波长	404.7	407.8	491.6	577.0	607.3	612.3
	410.8	433.9	546.1	579.1	623.4	690.8
	434.8	435.8				

表1 汞灯谱线（约定真值）

3.1 衍射级推导

由误差限的方和根原理对公式 (2) 进行计算

$$\delta\lambda = \lambda \sqrt{\left(\frac{\delta d}{d}\right)^2 + \left(\cot \varphi_m \frac{\delta \varphi_m}{\varphi_m}\right)^2} \quad (7)$$

由于对标标准波长测量的时候认为 $\delta\lambda = 0$ ，此时

$$\delta d = -d \cot \varphi_m \frac{\delta \varphi_m}{\varphi_m}, \left|\frac{\delta d}{d}\right| = \left|\cot \varphi_m \frac{\delta \varphi_m}{\varphi_m}\right| \quad (8)$$

从而 $m\delta\lambda = \sqrt{2}d \cos \varphi_m \delta\varphi_m = \sqrt{2(d^2 - (m\lambda)^2)}\delta\varphi_m$ ，整理有

$$\frac{\delta\lambda}{\delta\varphi_m} = \sqrt{2 \left(\left(\frac{d}{m} \right)^2 - \lambda^2 \right)} \quad (9)$$

由分光计仪器误差限 $\delta\varphi_m = 1'$ ，取 $\delta\lambda_0 \leq 1\text{nm}$ ， $\lambda_0 = 550\text{nm}$ ，代入得到

$$\frac{d}{m} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\delta\lambda}{\delta\varphi_m} \right)^2 + \lambda^2} \approx 2.5 \times 10^{-6}\text{m} \quad (10)$$

实验过程中使用光栅方程估测 $d \approx 3 \times 10^{-6}\text{m}$ ，带入公式 (10) 误差关系式得到 $m \geq 1.34$ ，且在实际测量中第二级亮纹**清晰度较好**，综合考虑下，取定 $m = 2$ 。

3.2 光栅常数测定

当光垂直入射时，测定 ± 2 级谱线衍射角，由公式 (2) 计算光栅常数

衍射级数	波长/nm	正级左	正级右	负级左	负级右
2	546.1	142°4'	322°3'	103°48'	283°48'
零级左	零级右	$\Delta\varphi$	$\varphi\text{m/rad}$	光栅常数/m	
122°54'	302°55'	2'	0.3339	3.3329×10^{-6}	

表2 垂直入射法测定光栅常数数据表格

其中光栅常数的计算过程如下

$$\begin{aligned} d &= \frac{2\lambda}{\sin \varphi_2} = \frac{2 \cdot 546.1 \times 10^{-9}\text{m}}{\sin \frac{142^\circ 4' - 103^\circ 48' + 322^\circ 3' - 283^\circ 48'}{4}} \\ &= \frac{1.0922 \times 10^{-6}\text{m}}{\sin 19.1292^\circ} \\ &\approx 3.3329 \times 10^{-6}\text{m} \end{aligned}$$

计算两侧 $\varphi_{\pm 2}$ ，消除偏心差误差， $\varphi_{+2} = \frac{142^\circ 4' - 122^\circ 54' + 322^\circ 3' - 302^\circ 55'}{2} = 19^\circ 9'$ ， $\varphi_{-2} = \frac{122^\circ 54' - 103^\circ 48' + 302^\circ 55' - 283^\circ 48'}{2} = 19^\circ 6'30''$ ，从而 $\Delta\varphi_{\pm 2} = 2'30'' < 4'$ ，说明**分光计的调整符合要求**。

该分光计的仪器误差限为

$$\Delta_{INS} = 1' = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \text{rad} = 2.91 \times 10^{-4} \text{rad} \quad (11)$$

代入公式 (7) 计算光栅常数的不确定度，计算过程以及列表如下

$$\begin{aligned}
 |\delta d| &= d \cot \varphi_m \frac{\delta \varphi_m}{\varphi_m} \\
 &= 3.3329 \times 10^{-6} \text{m} \cdot \cot 19.1292^\circ \cdot \frac{1'}{19.1292^\circ} \\
 &= 8.4 \times 10^{-9} \text{m}
 \end{aligned}$$

仪器误差限/rad	不确定度/m
2.90888×10^{-4}	8.37214×10^{-9}

表3 垂直入射法光栅常数不确定度计算表格

故光栅常数结果可以表示为 $d = (3.333 \pm 0.008) \times 10^{-6} \text{m}$ ($P = 68.3\%$)，对应刻痕为 300条/mm 为一种经典复刻光栅，用于测量各种可见光波长。

3.3 波长测定

3.3.1 垂直入射法

衍射级数	光栅常数/m	正级左	正级右	负级左	负级右
2	3.333×10^{-6}	143°20'	323°18'	102°37'	282°35'

零级左	零级右	$\Delta\varphi$	$\varphi\text{m/rad}$	波长/nm
122°54'	302°55'	3'	0.3553	579.7

表4 垂直入射法测定波长数据表格

计算两侧的衍射角之差同上，将衍射角的平均值代入公式 (2) 计算黄光波长

$$\begin{aligned}
 \lambda_y &= \frac{d \sin \varphi_m}{m} = \frac{1}{2} \cdot 3.333 \times 10^{-6} \text{m} \cdot \sin\left(\frac{143^\circ 20' - 102^\circ 37' + 323^\circ 18' - 282^\circ 35'}{4}\right) \\
 &= 1.6665 \times 10^{-6} \text{m} \cdot \sin(20.3583^\circ) \\
 &\approx 5.7974 \times 10^{-7} \text{m}
 \end{aligned}$$

误差限由公式 (6) 和公式 (11) 决定，其计算过程以及列表如下

$$\begin{aligned}
 \delta \lambda &= \lambda \sqrt{\left(\frac{\delta d}{d}\right)^2 + \left(\cot \varphi_m \frac{\delta \varphi_m}{\varphi_m}\right)^2} \\
 &= 5.7974 \times 10^{-7} \text{m} \cdot \sqrt{\left(\frac{0.008}{3.333}\right)^2 + \left(\cot 20.3583^\circ \cdot \frac{2.91 \times 10^{-4} \text{rad}}{20.3583^\circ}\right)^2} \\
 &= 5.7974 \times 10^{-7} \text{m} \cdot 3.26 \times 10^{-3} \\
 &\approx 1.9 \times 10^{-9} \text{m}
 \end{aligned}$$

仪器误差限/rad	不确定度/nm
2.90888×10^{-4}	1.9

表5 垂直入射法波长不确定度计算

故测量的黄光波长可以表示为 $\lambda_y = (5.80 \pm 0.02) \times 10^{-7} \text{m}$ ($P = 68.3\%$)，其约定真值 $579.1 \text{nm} = 5.791 \times 10^{-7} \text{m}$ 在测量区间范围内，偏离实际值 $\eta = \frac{580 \text{nm} - 579.1 \text{nm}}{579.1 \text{nm}} \approx 0.16\%$

3.3.2 斜入射法

本实验固定入射角 $i = 15^\circ 0'$ ，调节过程如下

转动前角度	转动后角度	入射角	衍射级数
$105^\circ 0'$	$120^\circ 0'$	$15^\circ 0'$	2

表6 斜入射法初始参数

当入射角固定后，在光栅两侧寻找 $m = 2$ 的光谱，分为同侧和异侧，代入公式 (1) 计算对应的波长，例如当衍射角和入射角位于法线异侧时，波长计算如下

$$\begin{aligned} \lambda_- &= \frac{d(\sin \varphi_m - \sin i)}{m} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3.333 \times 10^{-6} \text{m} \cdot \left(\sin \frac{162^\circ 19' - 125^\circ 0' + 342^\circ 18' - 305^\circ 0'}{2} - \sin 15^\circ \right) \\ &= 1.6665 \times 10^{-6} \text{m} \cdot (0.606104 - 0.258819) \\ &= 5.7875 \times 10^{-7} \text{m} \end{aligned}$$

$$\eta_- = \frac{\lambda_- - \lambda_y}{\lambda_y} = \frac{578.8 \text{nm} - 579.1 \text{nm}}{579.1 \text{nm}} = -0.052\%$$

λ_+ 以及 η_+ 的计算类似，两者的数据以及计算结果如下，由上述计算可知，波长不确定度为 1nm 量级，进而将结果保留至纳米的个位

约定真值/nm	垂直左	垂直右	正级左	正级右	φ_{m2}/rad	波长+/nm	相对误差+
579.1	$125^\circ 0'$	$305^\circ 0'$	$119^\circ 51'$	$299^\circ 49'$	0.0902	581	0.4%

光栅常数/m	垂直左	垂直右	负级左	负级右	φ_{m1}/rad	波长-/nm	相对误差-
3.333×10^{-6}	$125^\circ 0'$	$305^\circ 0'$	$162^\circ 19'$	$342^\circ 18'$	0.6512	579	-0.05%

表7 斜入射法波长测量数据以及结果

3.3.3 最小偏向角法

测定入射光偏向最小的时候对应的偏角，测量数据如下（对应衍射级数为4级）

衍射级数	光栅常数/m	约定真值/nm	入射左	入射右	出射左	出射右
4	3.33×10^{-6}	579.1	135°50'	315°49'	95°35'	275°35'
$2\delta/\text{rad}$		波长/nm	相对误差			
0.7023		573	-1.0%			

表8 最小偏向角法测量数据以及结果

其中波长的计算如下

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2d \sin \frac{\delta}{2}}{m} = \frac{1}{2} d \sin \frac{\delta}{2} \\ &= 1.6665 \times 10^{-6} \text{m} \cdot \sin \left(\frac{135^\circ 50' - 95^\circ 35' + 315^\circ 49' - 275^\circ 35'}{4} \right) \\ &= 1.6665 \times 10^{-6} \text{m} \cdot 0.344001 \\ &= 5.733 \times 10^{-7} \text{m} \end{aligned}$$

$$\text{相对误差 } \eta = \frac{573.3 \text{nm} - 579.1 \text{nm}}{579.1 \text{nm}} = -1.0\%$$

4 实验总结

4.1 误差分析

实验中测量波长的误差如下

垂直入射法	斜入射法正级	斜入射法负级	最小偏向角法
0.16%	0.4%	-0.05%	-1.0%

表9 各种方法测量波长的误差对比

则本次实验对于黄光的测量精度 $|\eta| \leq 1\%$ ，且若考虑由于分光器仪器 $\delta\varphi = 1'$ 的偏差，可以肯定，真值在 $\mu \pm \sigma$ 区间范围内。

相较其余方法而言，最小偏向角法的测量误差最大，究其原因是在寻找最小偏向角的过程中，处于**顶峰**位置的范围**人眼难以区分**，而其余光路图为**静态的**，误差更**可控**，该处偏角数值计算如下

$$\Delta(\delta) = i + \delta = \delta + \arcsin \left(\frac{m\lambda}{d} - \sin \delta \right) = \delta + \arcsin(0.694989 - \sin \delta) \quad (12)$$

在最小偏向角 $\delta \in [20.334^\circ - \epsilon, 20.334^\circ + \epsilon]$ 区域，取 $\epsilon = 0.05^\circ = 3'$ 作图如下

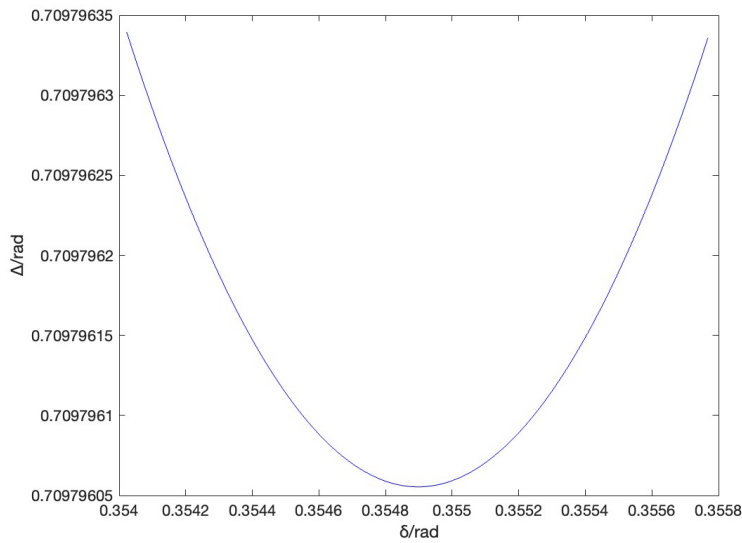


图2 偏向角和衍射角在极值点附近的变化关系

图中可以看出，在最小偏向角（极值点）附近，变化是非常缓慢的， $3'$ 的衍射角变化对应偏向角的变化不到 $0.70979635 - 0.7097961 = 2.5 \times 10^{-7} \text{rad} = 0.05''$ ，对应在光谱中，由于整个视场约为 $3'$ ，约为整个视场的 $\frac{1}{3600}$ ，人眼难以精确地找到最小偏向角的位置。

前面计算过 $1'$ 引起的偏差能达到数个纳米，由上述计算可知，最小偏向角极其容易造成 $3'$ 的误差，这也就解释了最小偏向角偏离真值最大的原因。

4.2 范式分析

实验中从三种不同的视角，“充分”利用了光栅方程

垂直入射法	光栅方程 ┆→	标准运用
斜入射法	光栅方程 ┆→	增加初始值
最小偏向角法	光栅方程 ┆→	动态变化下的极值

这提示我们面对同一个问题可以从不同的角度进行拆解，形成不同的方法。

5 原始数据

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	光栅衍射实验											未央软-11
2												鲁睿
3	A) 垂直入射, 测定光栅常数和波长											
4	光栅常数	衍射级数	波长/nm	正级左	正级右	负级左	负级右	零级左	零级右	$\Delta\phi'$	$\phi m'/\text{rad}$	光栅常数/m
5		2	546.1	142°4'	322°3'	103°48'	283°48'	122°54'	302°55'	1.2	0.3339	3.3329E-06
6	黄光波长	衍射级数	光栅常数/m	正级左	正级右	负级左	负级右	零级左	零级右	$\Delta\phi'$	$\phi m'/\text{rad}$	波长/nm
7		2	3.33E-06	143°20'	323°18'	102°37'	282°35'	122°54'	302°55'	3.0	0.3553	579.7
8	不确定度计算											
9	光栅常数	仪器误差限/rad	不确定度/m	黄光波长	仪器误差限/rad	不确定度/nm						
10		2.91E-04	8.37214E-09		2.91E-04	1.9						
11												
12	B) 入射角 $i=15^\circ$, 测定波长											
13	入射角	光栅常数/m	垂直左	垂直右	负级左	负级右	$\phi m1/\text{rad}$	波长+/nm	相对误差+		转动前角度	转动后角度
14	15°0'	3.33E-06	125°0'	305°0'	162°19'	342°18'	0.6512	578.7	-0.1%		105°0'	120°0'
15	衍射级数	约定真值/nm	垂直左	垂直右	正级左	正级右	$\phi m2/\text{rad}$	波长-/nm	相对误差-			
16	2	579.1	125°0'	305°0'	119°51'	299°49'	0.0902	581.4	0.4%			
17												
18	C) 最小偏向角测定波长											
19	衍射级数	光栅常数/m	约定真值/nm	入射左	入射右	出射左	出射右	$2\delta/\text{rad}$	波长/nm	相对误差		
20	4	3.33E-06	579.1	135°50'	315°49'	95°35'	275°35'	0.7023	573.3	-1.01%		
21												

图2 原始数据截图