复变函数（李岩松）期末考试回忆

作者：未央-软 11 鲁睿

1　(15') C-R 方程

请用 Cauchy-Riemann 方程证明模长为常数的解析函数为常函数。

2　(32') 多值函数

已知 $\omega(z)=\sqrt[3]{\dfrac{(z(1-z))^2}{1+z}}$，规定上半平面 $z>0$ 的幅角为 0。

(1) 计算 $\omega(\pm i)$；

(2) 求 $\omega(z)$ 在 $|z|>1$ 的 Lorent 展开；

(3) 求 $\omega(z)$ 在 ∞ 处的留数。

3　(15') Poisson 公式

设复变函数 $\omega(z)=u+iv$，在 $0\le\arg(z)\le\pi$ 范围内，当 $z\to\infty$，$f(z)$ 一致趋向于 0，证明对于上半复平面的点，下述公式成立

$$\begin{cases} u(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi \\ v(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\xi)f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi \end{cases}$$

其中 $f(\xi)=u(\xi,0)$，该公式为上半平面的 Poisson 公式。

4　(30') 留数定理

使用留数定理计算下列积分

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-x\cos\theta}{1+x^2-2x\cos\theta}d\theta, x\in\mathbb{R}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{x^3-1}dx$

5　(12') gamma 函数应用

使用 Γ 函数以及 Beta 函数的相关知识求解下列积分，要求积分结果中不能出现 Γ 或者 B 函数。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^\alpha\theta, -1<\alpha<1$$